В. В. Григорьев-Голубев, Н. В. Васильева, Е. А. Кротов

Теория вероятностей и математическая статистика

Руководство по решению задач

2-е издание

В. В. Григорьев-Голубев
Н. В. Васильева
Е. А. Кротов

Теория вероятностей и математическая статистика

Руководство по решению задач

2-е издание

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2021

УДК 519.21
ББК 22.1я73
Г83

Григорьев-Голубев, В. В.

Г83 Теория вероятностей и математическая статистика. Руководство по решению задач: учебник / В. В. Григорьев-Голубев, Н. В. Васильева, Е. А. Кротов. — 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 304 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-6809-8

В книге содержатся описание и примеры выполнения входящих в учебные программы лабораторных работ по математической статистике, даются первоначальные сведения о пакете прикладных математических программ Mathcad и примеры выполнения лабораторных работ в среде Mathcad. Краткие сведения из теории по каждому разделу дисциплины позволят студентам технических и экономических вузов сэкономить время, а подробный разбор приведенных в книге задач сформирует правильный подход к их постановке и выбору метода решения. На основе излагаемого материала преподаватели математики могут формировать варианты контрольных и лабораторных работ, а также индивидуальных домашних заданий — типовых расчетов. Второе издание содержит некоторые исправления и дополнено мало освещенным в литературе разделом «Случайные процессы».

Для студентов и преподавателей высших учебных заведений

УДК 519.21
ББК 22.1я73

Группа подготовки издания:

Зав. редакцией	*Людмила Гауль*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Карины Соловьевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В. М. Лихачев, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики ВКА им. А. Ф. Можайского

В. Б. Хазанов, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и математического моделирования СПбГМТУ

"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

ISBN 978-5-9775-6809-8

Оглавление

Предисловие

Данное руководство разработано в помощь студентам инженерных и инженерно-экономических специальностей при решении задач и выполнении лабораторных работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика. Случайные процессы».

В *главе 1* даны элементы комбинаторного анализа, используемые при решении задач по теории вероятностей.

Главы 2–5 содержат такие разделы курса теории вероятностей, как случайные события, случайные величины, функции случайных величин и случайные векторы. В них кратко рассмотрен необходимый теоретический материал, разобрано большое количество типовых задач, приведены задачи для самостоятельного решения, а также варианты индивидуальных домашних заданий.

Главы 6 и *7* относятся к дисциплине «Математическая статистика» и включают в себя такие разделы, как первичная обработка экспериментальных данных, точечное и интервальное оценивание параметров распределения и проверка истинности статистических гипотез с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова.

Глава 8 руководства содержит недостаточно освещенный в литературе раздел теории вероятности «Случайные процессы». В этой главе кратко изложены основы теории случайных процессов, спектральный анализ стационарных случайных процессов, цепи Маркова. Представлен необходимый для решения задач теоретический материал дисциплины, разобраны решения большого количества типовых задач, приведены задачи для самостоятельного решения, а также варианты расчетно-графических работ (типовых расчетов) и варианты заданий для лабораторных работ.

В книге содержатся примеры выполнения лабораторных работ с вычислениями, выполненными на калькуляторе и с использованием пакета прикладных математических программ Mathcad.

В конце работы дается список рекомендуемой и цитируемой литературы, а также необходимые статистические таблицы.

ГЛАВА 1

Элементы комбинаторики

Некоторые формулы и задачи комбинаторного анализа (комбинаторики) представлены в данной книге в связи с тем, что они используются во многих задачах классической теории вероятностей.

1.1. Принцип умножения и принцип сложения

Принцип умножения

Пусть требуется выполнить k упорядоченных и взаимоисключающих друг друга действий. Если первое из этих действий можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами, ..., k-е действие — n_k способами, то все k упорядоченных действий можно выполнить n способами, где

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k. \tag{1.1}$$

Задача 1.1. Сколько существует всевозможных шестизначных чисел?

Решение. Первая цифра числа не может быть нулем. Следовательно, первой может быть любая из цифр от 1 до 9. Остальные пять мест в числе могут быть заняты любой из десяти цифр. Поэтому, согласно принципу умножения, количество шестизначных чисел равно:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900\ 000.$$

Принцип сложения

Если для выполнения какого-то действия имеется: n_1, или n_2, ..., или n_k взаимно исключающих друг друга способов, то общее количество способов, которое можно использовать для выполнения этого действия, равно:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k. \tag{1.2}$$

Задача 1.2. Сколько пар разных пирожных можно выбрать, если имеется десять пирожных "Эклер", семь пирожных "Буше" и восемь корзиночек?

Решение. Пары пирожных могут составляться из пирожных "Эклер" и "Буше", для этого имеется $10 \cdot 7 = 70$ вариантов. Пары пирожных могут быть составлены из пирожных "Эклер" и корзиночек — таких $10 \cdot 8 = 80$ вариантов. И, наконец, это могут быть пирожные "Буше" и корзиночки — $7 \cdot 8 = 56$ вариантов. Общее количество способов n определяется по принципу сложения (1.2)

$$n = 70 + 80 + 56 = 206 .$$

1.2. Размещения, перестановки, сочетания

Пусть имеется множество E, содержащее n элементов, и из этого множества делаются выборки по m элементов в каждой $(m \le n)$.

Размещениями называются упорядоченные выборки из множества E. Число размещений из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1), \qquad (1.3)$$

или

$$A_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!} .$$

Пример 1. Имеется множество $E = \{1; 2; 3\}$. Из элементов этого множества составляются двухэлементные упорядоченные множества:

$$\{1; 2\}, \ \{1; 3\}, \ \{2; 1\}, \ \{2; 3\}, \ \{3; 1\}, \ \{3; 2\} .$$

Чтобы убедиться, что мы выписали все размещения, определим их количество, используя формулу (1.3):

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6 .$$

При $m = n$ размещения называются *перестановками*. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n! .$$

Задача 1.3. Сколько шестизначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение. Количество таких чисел равно числу размещений из шести по шесть, т. е. числу перестановок из шести. Поэтому

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 .$$

Сочетаниями называются неупорядоченные выборки из множества E. Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)}{m!} . \qquad (1.4)$$

Пример 2. Если в примере 1 из элементов этого множества E составляются двухэлементные неупорядоченные множества, то число таких множеств — число сочетаний из трех элементов по два — равно 3, т. к. одинаковыми сочетаниями будут множества $\{1;2\}$ и $\{2;1\}$, $\{1;3\}$ и $\{3;1\}$, $\{2;3\}$ и $\{3;2\}$. Поэтому сочетаниями будут только следующие три выборки:

$$\{1;2\},\ \{1;3\},\ \{2;3\}.$$

Для сочетаний часто более удобной является формула:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Например, $C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$.

При вычислении числа сочетаний следует учитывать, что:

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1.$$

Задача 1.4. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя для их записи только две цифры?

Решение. Если числа составляются из цифр 1, 2, ..., 9, то имеется C_9^2 вариантов выбора двух цифр из девяти. Каждая позиция четырехзначного числа может быть заполнена одной из двух выбранных цифр, т. е. имеется $2^4 = 16$ вариантов составления числа. При этом должны быть исключены два случая, при которых четырехзначное число состоит из одинаковых цифр. Поэтому, согласно принципу умножения (1.1), количество k_1 четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, ..., 9, равно:

$$k_1 = C_9^2\cdot(16-2) = \frac{9\cdot 8}{2}\cdot 14 = 9\cdot 8\cdot 7.$$

Иначе следует подсчитывать количество четырехзначных чисел, в записи которых есть ноль, поскольку число не может начинаться с нуля. Первая позиция таких чисел может быть занята одной из цифр 1, 2, ..., 9, т. е. имеется 9 вариантов выбора. Остальные три позиции могут быть заняты этой же цифрой или нулем, за исключением случая, когда в записи числа одна цифра, т. е. 2^3-1 вариантов выбора. Поэтому количество k_2 таких чисел равно

$$k_2 = 9\cdot\left(2^3-1\right) = 9\cdot 7.$$

Искомое количество четырехзначных чисел определяется по принципу сложения (1.2):

$$k = k_1 + k_2 = 9\cdot 8\cdot 7 + 9\cdot 7 = 9\cdot 7\cdot 9 = 81\cdot 7 = 567.$$

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. В магазине канцелярских товаров имеется 18 шариковых ручек красного цвета, 8 — синего цвета и 6 — черного цвета. Кроме того, в наличии есть 4 ручки, которые могут писать синим и красным цветом, а также две ручки, которые могут писать тремя цветами. Сколькими способами можно сделать покупку, чтобы иметь возможность писать всеми тремя цветами?

Задача 1.6. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить, используя три цифры: 1, 2 и 3? Используя цифры 0, 1 и 2?

Задача 1.7. Сколько различных трехцветных полосатых флагов (полосы могут быть расположены как горизонтально, так и вертикально) можно сшить, если имеется материал пяти цветов?

Задача 1.8. Сколькими способами могут встать в очередь для сдачи зачета 6 студентов? Сколькими способами они могут организовать очередь, если Маша и Саша должны стоять рядом? Сколько получится вариантов, если при этом Саша должен стоять после Маши?

Задача 1.9. Пять книг, среди которых 2 одинаковые, расставляются на полке. Сколько имеется вариантов их расстановки?

Задача 1.10. В поселке 12 домов. Каждые два дома соединены друг с другом пешеходными дорожками с цветами. Сколько таких дорожек?

Задача 1.11. Из ящика с деталями двух типов выбирают 3 детали. Сколькими способами это можно сделать, если деталей первого типа 6, второго типа — 4, а из трех выбранных деталей две должны быть первого типа?

Задача 1.12. Имеется 6 роз красного и 6 роз белого цвета. Сколько различных букетов из них можно составить, если каждый букет должен состоять из двух роз красного цвета и трех роз белого цвета?

Задача 1.13. В группе из 50 студентов 20 знают немецкий язык, 15 — английский, 5 — оба языка, а остальные знают только русский. Сколькими способами можно выбрать из этой группы двух студентов, чтобы вместе они могли понять и английскую, и немецкую речь?

ГЛАВА 2

Случайные события

2.1. Случайный эксперимент. Пространство элементарных событий. Случайное событие

Под словами "эксперимент", "опыт", "наблюдение", "испытание" понимается процесс, который можно осуществлять (в том числе и мысленно) неограниченное число раз, выполнив некоторую фиксированную совокупность условий S. Результат *эксперимента* называется *исходом*.

Если в результате проведения эксперимента наступает только один исход, то такой эксперимент называется *детерминированным*. Если же в результате эксперимента могут наступить два и более исходов, то такой эксперимент называют *случайным.*

Наравне с термином "исход" используют также термин *"элементарное событие"*. Множество всех исходов (элементарных событий) данного случайного эксперимента образует *пространство элементарных событий*, которое обозначают Ω, а сами элементарные события — ω.

Следует понимать, что одному и тому же случайному эксперименту в зависимости от того, что в нем наблюдается, можно сопоставить разные пространства элементарных событий Ω. Например, если при бросании игральной кости наблюдается количество выпавших очков, то пространство элементарных событий включает в себя шесть исходов, т. е.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

где ω_i — элементарное событие, которое состоит в том, что выпадает грань с i очками. Если в этом же эксперименте наблюдается, выпало или не выпало шесть очков, то пространство элементарных событий включает в себя два исхода: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 — выпало шесть очков, ω_2 — не выпало шесть очков.

Пространство Ω может представлять собой дискретное множество: конечное $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ или счетное $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$. Ω может также являться и несчетным множеством.

Пример 1. В урне 5 белых и три красных шара. Вынимают случайным образом последовательно 2 шара. Такому эксперименту соответствуют 4 исхода:

- оба шара белые;
- первый шар белый, а второй — красный;
- первый шар красный, а второй — белый;
- оба шара красные.

Пространство элементарных событий (исходов) данного эксперимента можно символически представить в следующем виде:

$$\Omega = \{(\text{Б, Б});\ (\text{Б, К});\ (\text{К, Б});\ (\text{К, К})\},$$

где буквами "Б" и "К" обозначен цвет выбранного шара: белый или красный соответственно. В этом примере пространство элементарных событий конечно.

Пример 2. Эксперимент состоит в том, что бросается игральная кость до тех пор, пока не выпадет 6 очков. В этом эксперименте пространство элементарных событий будет бесконечным и счетным $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, поскольку эксперимент теоретически может продолжаться бесконечно. При этом исход ω_1 соответствует тому, что 6 очков выпало на первом бросании, исход ω_2 означает, что на первом бросании не выпало 6 очков, а на втором — выпало, ..., исход ω_n означает, что 6 очков выпало на n-м бросании, а на предыдущих $n-1$ бросаниях выпало какое-то другое число очков.

Пример 3. Если при проведении эксперимента отмечается время t прихода автобуса на автобусную остановку в течение 12 часов (т. е. $\omega = t$), то пространство элементарных событий будет несчетным:

$$\Omega = \{t \mid t \in [0, 12]\}.$$

Подмножество A пространства элементарных событий Ω $(A \subset \Omega)$ называется *случайным событием* или просто *событием.* В конечном и счетном случаях это может быть любое подмножество, а в несчетном случае — специальным образом выбранное (подробнее об этом *см. в разд. 2.3*).

Говорят, что при проведении случайного эксперимента S событие A произошло, если наступил исход ω, принадлежащий событию A ($\omega \in A$).

2.2. Алгебраические операции над случайными событиями

Определение 2.1. *Невозможным* называется событие, которое не содержит ни одного элементарного события пространства Ω данного эксперимента. Невозможное событие обозначается $\varnothing$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Другими словами, невозможным называется событие, которое не происходит ни при одном проведении данного эксперимента, т. е. пустое множество.

Определение 2.2. *Достоверным* называется событие, которое содержит все элементарные события пространства Ω данного эксперимента. Достоверное событие обозначается Ω.

ЗАМЕЧАНИЕ

Другими словами, достоверным называется событие, которое происходит при каждом проведении данного эксперимента.

Определение 2.3. *Суммой* событий A и B называется событие, которое включает в себя все элементарные события, принадлежащие или событию A, или событию B, или им обоим. Сумма событий обозначается $A+B$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Другими словами, суммой событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий-слагаемых.

Если изобразить пространство элементарных событий в виде прямоугольника на плоскости, а события A и B в виде множеств точек, лежащих внутри этого прямоугольника, то сумма событий $A+B$ представляет собой заштрихованную область, изображенную на рис. 2.1.

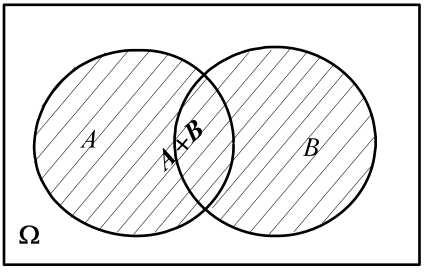

Рис. 2.1

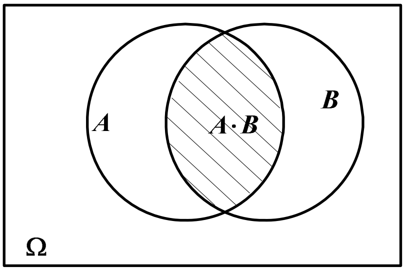

Рис. 2.2

Определение 2.4. *Произведением* событий A и B называется событие, которое состоит из элементарных событий, принадлежащих обоим этим событиям (рис. 2.2). Произведение событий обозначается $A \cdot B$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Другими словами, произведением событий называется событие, состоящее в одновременном наступлении событий-сомножителей.

Определение 2.5. События A и B называются *несовместными*, если $A \cdot B = \varnothing$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ — пространство элементарных событий некоторого эксперимента, то исходы ω_i — несовместные события, т. к. при каждой реализации эксперимента происходит только один исход. Сумма всех исходов — достоверное событие, т. к. при каждой реализации эксперимента какой-то исход (результат эксперимента) должен произойти.

Определение 2.6. *Разностью* событий A и B называется событие, состоящее из элементарных событий, принадлежащих событию A и не принадлежащих событию B (рис. 2.3). Разность событий обозначается $A-B$.

Замечание

Другими словами, разностью событий называется событие, состоящее в наступлении события-уменьшаемого и не наступлении события-вычитаемого.

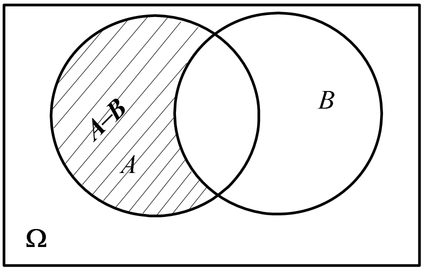

Рис. 2.3

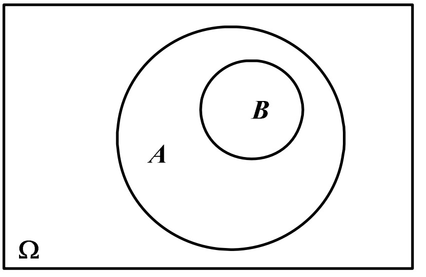

Рис. 2.4

Определение 2.7. Говорят, что событие B *влечет за собой* событие A, и пишут $B\subset A$, если множество элементарных событий, из которых состоит событие B, является подмножеством множества элементарных событий, из которых состоит событие A (рис. 2.4).

Определение 2.8. Говорят, что события A и B *тождественны* (равны) друг другу, и пишут $A=B$, если $A\subset B$ и $B\subset A$.

Определение 2.9. Событие $\overline{A}=\Omega-A$ называется *противоположным* событию A (рис. 2.5).

Если событие $\overline{A}$ — противоположное событию A, то:

$$\begin{cases} A\cdot\overline{A}=\varnothing, \\ A+\overline{A}=\Omega. \end{cases}$$

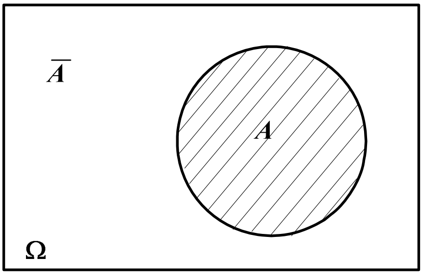

Рис. 2.5

Задача 2.1. Пусть A_1, A_2 и A_3 — произвольные наблюдаемые в эксперименте события. Найдите выражения для следующих событий:

1) произошло только одно из этих событий;

2) произошли все три события;

3) не произошло ни одно из них;

4) произошло хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3.

Решение. 1) Пусть событие B состоит в том, что произошло только одно из событий A_1, A_2, A_3. Тогда

$$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 .$$

2) Пусть событие C состоит в том, что произошли все три события A_1, A_2 и A_3 одновременно. Тогда C — это их произведение, т. е.

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

3) Пусть событие D состоит в том, что не произошло ни одно из событий A_1, A_2, A_3. Следовательно, в данном случае, произошли одновременно три события, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 соответственно. Тогда D является произведением этих противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$, т. е.

$$D = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 .$$

4) Пусть событие F состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3. По определению суммы событий

$$F = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Поскольку событие F является противоположным событию D, то его можно выразить через события A_1, A_2, A_3 и в таком виде:

$$F = \Omega - D = \Omega - \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 .$$

Задача 2.2. В коробке лежат красные и синие фломастеры. Случайным образом выбирают два из них. Событие A состоит в том, что оба фломастера оказались красными. Событие B — один из них красный, а один — синий. Что означают события $\overline{A}, \overline{B}, A+B, A \cdot B, A \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot B$?

Решение. Построим пространство элементарных событий данного эксперимента, обозначая цвет фломастеров буквами: К — красный цвет и С — синий. Отметим при этом исходы, входящие в события A и B:

$$\Omega = \left\{ \overbrace{(\text{КК})}^{A} \overbrace{(\text{КС})(\text{СК})(\text{СС})}^{\overline{A}} \right\} \text{ или } \Omega = \left\{ \overbrace{\underbrace{(\text{КК})}_{A}(\text{СС})}^{\overline{B}} \overbrace{(\text{КС})(\text{СК})}^{B} \right\}.$$

Из вида пространства Ω ясно, что событие $\overline{A}$ состоит в том, что хотя бы один из двух фломастеров — синий, а событие $\overline{B}$ — взятые фломастеры одного цвета: оба красные или оба синие.

В событие $A+B$ не входит только один исход эксперимента — $\{\text{СС}\}$. Поэтому событие $A+B$ означает, что хотя бы один из выбранных фломастеров — красный. События A и B несовместные, поэтому $A \cdot B = \varnothing$. Поскольку $A \subset \overline{B}$, а $B \subset \overline{A}$, то $A \cdot \overline{B} = A$ и $\overline{A} \cdot B = B$.

Задача 2.3. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания. Событие A_i — он попал при i-м броске, событие B — он попал в корзину с четвертого раза. Выразить событие B через события A_i.

Решение. Событие B является произведением четырех событий:

- ❐ $\overline{A}_1$ — промах при первом броске;
- ❐ $\overline{A}_2$ — промах при втором броске;
- ❐ $\overline{A}_3$ — промах при третьем броске;
- ❐ A_4 — попадание при четвертом броске.

Следовательно, $B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4$.

Задача 2.4. Из колоды карт последовательно случайным образом вынимают три карты. Событие A_1 — первая карта красной масти, событие A_2 — вторая карта красной масти, событие A_3 — третья карта красной масти, событие B — хотя бы одна карта черной масти. Выразить событие B через события A_i $(i = 1, 2, 3)$.

Решение. По определению суммы событий

$$B = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 .$$

Однако в данной задаче удобнее перейти к противоположному событию $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \overline{B}$ — все три карты красной масти. Тогда, с учетом определения 2.9, событие B равно разности событий:

$$B = \Omega - A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 .$$

Замечание

Событие B можно выразить через события A_i, не вводя событие Ω, т. е. $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2\overline{A}_3$.

Задача 2.5. Событие A состоит в том, что номер телефона оканчивается на цифру, являющуюся четным числом. Событие B состоит в том, что номер телефона оканчивается на ноль. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot B$?

Решение. При решении этой задачи следует понимать, что $B \subset A$ (рис. 2.6).

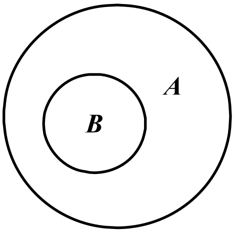

Рис. 2.6

Тогда ясно, что:

- $A + B = A$, т. е. номер телефона оканчивается на цифру, которая является четным числом;
- $A \cdot B = B$, т. е. номер телефона оканчивается на ноль;
- $A \cdot \overline{B} = A - B$, т. е. номер телефона оканчивается на 2, 4, 6, 8;
- $\overline{A} \cdot B = \varnothing$, т. е. невозможное событие.

Замечание

Задачи 2.6—2.11 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.6. Из колоды 36 карт последовательно вынимают три карты. Событие A_k $(k = 1, 2, 3)$ — *k*-я карта пиковой масти. Что означают события:

1) $A_1 + A_2 + A_3$; 2) $A_1 A_2 A_3$; 3) $A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3$?

Задача 2.7. Событие A — хотя бы один из четырех проведенных четырьмя охотниками выстрелов попал в цель, B — все выстрелы дали промах, событие C — только один выстрел попал в цель. Что означают события $A + B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $\overline{A}$, $A - C$?

Задача 2.8. Два игрока по очереди вынимают из колоды 36 карт по одной карте. Выигрывает тот, кто первым вынет даму пиковой масти. Событие A_k — первый игрок вынимает даму пик на *k*-м ходе, событие B_j — даму пик вынимает второй игрок на *j*-м ходе, событие C — первый выиграл до четвертого хода. Выразить событие C через события A_k и B_j.

Задача 2.9. Цепь состоит из трех элементов первого типа и одного элемента второго типа и выходит из строя, если неисправны все элементы первого типа или элемент второго типа. Событие A_i — не исправен *i*-й элемент первого типа $(i = 1, 2, 3)$, B — не исправен элемент второго типа, C — цепь вышла из строя. Выразить события C и $\overline{C}$ через A_i и B.

Задача 2.10. Пусть A, B и C — произвольные случайные события. Выразить через них следующие события:

1) произошло только событие A;

2) произошло ровно два события из указанных трех;

3) ни одно событие не произошло;

4) все три события произошли;

5) произошло хотя бы одно событие;

6) хотя бы одно событие не произошло.

Задача 2.11. Подбрасываются три монеты. События: A_k, $(k=1,2,3)$ — на *k*-й монете выпал герб, B — на трех монетах выпало не более одного герба, C — на всех трех монетах выпал герб. Выразить события B и $\overline{C}$ через события A_k.

2.3. Вероятностная модель случайного эксперимента. Вероятностное пространство

В теории вероятностей каждому случайному событию сопоставляется числовая мера его осуществления — вероятность данного события. Говорят, что построена вероятностная модель случайного эксперимента, если установлена связь между исходами и их вероятностями, что дает возможность вычислять вероятность любого события $A \subset \Omega$.

В общем случае такой моделью служит вероятностное пространство $\langle \Omega, \Im, P \rangle$, где Ω — пространство элементарных событий; $\Im$ — некоторое множество событий, над которыми определены операции сложения, умножения, вычитания и перехода к противоположному событию; P — заданная на множестве $\Im$ функция этих событий ($P = P(A)$, где $A \in \Im$), называемая вероятностью этих событий.

Для конечного и счетного Ω вероятностное пространство можно представить в более простой форме.

Вероятностная модель случайного эксперимента с конечным числом исходов

Предположим, что случайный эксперимент имеет конечное число исходов, т. е. пространство элементарных событий Ω является конечным.

Вероятностной моделью эксперимента с конечным числом исходов служит конечное вероятностное пространство, которое удобно записывать в виде:

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ P(\omega_1) & P(\omega_2) & \dots & P(\omega_n) \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ — исходы эксперимента (элементарные события); $P(\omega_1)$, $P(\omega_2), \dots, P(\omega_n)$ — аксиоматически приписанные исходам вероятности, для которых должны выполняться:

- $P(\omega_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ — *аксиома неотрицательности*;
- $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ — *аксиома нормированности.*

Определение 2.10. *Вероятностью произвольного события* $A \in \Im (A \subset \Omega)$ в вероятностной модели с конечным числом исходов называется число, обозначаемое $P(A)$ и равное сумме вероятностей всех входящих в него исходов.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \tag{2.1}$$

Замечание 1

В случае эксперимента с конечным числом исходов система множеств $\Im$ замкнута относительно введенных на ней конечного числа операций сложения и умножения, т. е. из того, что $A \in \Im$ и $B \in \Im$ следует: 1) $A + B \in \Im$; 2) $A \cdot B \in F$; 3) $\overline{A} \in \Im$; 4) $\Omega \in \Im$. В этом случае говорят, что система подмножеств $\Im$ является *алгеброй*.

Замечание 2

Легко убедиться, что определенная формулой (2.1) вероятность $P(A)$ удовлетворяет трем аксиомам:

P1. аксиоме неотрицательности: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Im$;

P2. аксиоме нормированности: $P(\Omega) = 1$;

P3. аксиоме аддитивности: если $A \in \Im$ и $B \in \Im$ — несовместные, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Формула классической вероятности

Если пространство элементарных событий некоторого случайного эксперимента S конечно, т. е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, а все исходы (элементарные события) ω_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ — равновозможные, то вероятность появления случайного события $A \in \Im \ (A \subset \Omega)$ можно определить по *формуле классической вероятности*

$$P(A) = \frac{m_A}{n}, \tag{2.2}$$

где n — множество всех исходов данного эксперимента; m_A — множество исходов, благоприятствующих наступлению события A (входящих в событие A).

Замечание

При подсчете вероятностей с помощью классического определения часто оказываются полезными сведения из комбинаторики, приведенные в *главе 1*.

Задача 2.12. Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что один раз выпадет герб, а другой раз — решетка?

Решение. Задачу можно решить по определению 2.1, построив пространство элементарных событий или используя формулу классической вероятности (2.2).

1-й способ. Построим пространство элементарных событий рассматриваемого эксперимента так же, как это было сделано в примере 2.2.

$$\Omega = \{(\text{Г, Г});\ (\text{Г, Р});\ (\text{Р, Г});\ (\text{Р, Р})\}.$$

Поскольку нет оснований предпочесть один исход эксперимента другому, то полагаем, что вероятности этих событий равны, т. е.

$$P(\text{Г, Г}) = P(\text{Г, Р}) = P(\text{Р, Г}) = P(\text{Р, Р}) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, вероятностное пространство эксперимента имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{Г, Г}) & (\text{Г, Р}) & (\text{Р, Г}) & (\text{Р, Р}) \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Обозначим интересующее нас событие через A. Очевидно, что оно содержит два исхода (Г, Р) и (Р, Г), т. е. $A = \{(\text{Г, Р})\} + \{(\text{Р, Г})\}$. Поэтому, по формуле (2.1) получим

$$P(A) = P\{(\text{Г, Р})\} + P\{(\text{Р, Г})\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2-й способ. Рассматриваемый эксперимент имеет четыре равновозможных исхода: (Г, Г), (Г, Р), (Р, Г), (Р, Р). Это позволяет нам воспользоваться формулой классической вероятности (2.2). Наступлению интересующего нас события A благоприятствуют два исхода (Г, Р) и (Р, Г). Полагая в формуле (2.2) $n = 4$, $m_A = 2$, получим $P(A) = \frac{1}{2}$.

Задача 2.13. На одиннадцати картонных карточках написаны буквы В, Е, Р, О, Я, Т, Н, О, С, Т, Ь. Случайным образом берут шесть карточек и из них составляют слово. Какова вероятность, что из букв, написанных на выбранных карточках, можно составить слово ЯРОСТЬ?

Решение. Пусть событие A — выбранные карточки могут образовать слово ЯРОСТЬ. Используем для вычисления вероятности этого события формулу классической вероятности (2.2).

Найдем число всех исходов эксперимента, которое равно числу сочетаний из 11 (количество всех карточек) по 6 (количество выбираемых карточек):

$$n = C_{11}^{6} = \frac{11!}{6!\,5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{120} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}{1} = 462.$$

Число благоприятствующих событию A исходов найдем по принципу умножения (1.1), учитывая, что в заданном наборе букв буквы О и Т повторяются дважды. Поэтому

$$m_A = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4.$$

Следовательно, $P(A) = \frac{4}{462} \cong 0{,}0086$.

Задача 2.14. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших на них очков равна 8?

Решение. Поскольку на каждой грани может выпасть от одного до шести очков, то число всех исходов этого эксперимента, согласно принципу умножения (1.1), равно:

$$n = 6 \cdot 6 = 36 .$$

Выпишем все исходы (табл. 2.1), входящие в событие A — сумма выпавших на игральных костях очков равна восьми.

Таблица 2.1

Первая кость	3	5	4	2	6
Вторая кость	5	3	4	6	2

Из таблицы ясно, что в событие A входят 5 исходов, т. е. $m_A = 5$. Тогда по формуле классической вероятности (2.2):

$$P(A) = \frac{5}{36} .$$

Задача 2.15. Из колоды 36 карт наудачу вынимают три карты. Найти вероятность того, что:

1) все три карты будут красной масти;

2) две карты будут красной масти, а одна — черной;

3) одна карта будет дама, вторая — король, а третья — валет;

4) дама, король и валет будут одной масти.

Решение.

1) Пусть событие A — все три вынутые карты красной масти. По формуле классической вероятности (2.2)

$$P(A) = \frac{m_A}{n} .$$

Исходом эксперимента служит тройка карт, вынутая из колоды, причем нас интересует только состав этой тройки. Число всех исходов n равно числу способов вынуть три карты из 36. Это неупорядоченные выборки. Следовательно, число всех исходов равно числу сочетаний из 36 по 3.

$$n = C_{36}^3 = \frac{36!}{3! \cdot 33!} = 34 \cdot 35 \cdot 6 .$$

Поскольку карт красной масти половина, т. е. 18, то число благоприятствующих событию A исходов — это число сочетаний из 18 по 3, т. е.

$$m_A = C_{18}^3 = \frac{18!}{3! \cdot 15!} = 16 \cdot 17 \cdot 3 .$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{16 \cdot 17 \cdot 3}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{4}{35}.$$

2) Пусть B — событие, состоящее в том, что две вынутые карты красной масти, а одна — черная. Число различных исходов при извлечении неупорядоченной тройки карт из колоды подсчитано на предыдущем шаге и равно $n = 34 \cdot 35 \cdot 6$. Число способов вынуть две карты красной масти равно числу сочетаний из 18 по 2, а число способов вынуть одну карту черной масти равно 18. Согласно принципу умножения (1.1) число благоприятных для события B исходов равно

$$m_B = C_{18}^2 \cdot 18 = \frac{18 \cdot 17}{1 \cdot 2} \cdot 18 = 18 \cdot 17 \cdot 9.$$

Тогда по формуле классической вероятности (2.2)

$$P(B) = \frac{18 \cdot 17 \cdot 9}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{27}{70}.$$

3) Пусть событие C — вынуты дама, король и валет (масти их любые, возможно и одинаковые). Число всех исходов, как и в предыдущих случаях, равно $n = 34 \cdot 35 \cdot 6$. Число возможностей вынуть из колоды в 36 карт одну даму, или одного короля, или одного валета равно 4. Согласно принципу умножения $m_C = 4 \cdot 4 \cdot 4$. Тогда

$$P(C) = \frac{64}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{16}{1785} \cong 0{,}0089.$$

4) Пусть событие D состоит в том, что три вынутые карты — дама, король и валет одной масти. В каждой масти только одна благоприятная комбинация, а мастей — четыре. Тогда по принципу умножения благоприятных для события D исходов столько же, сколько мастей в колоде карт, т. е. $m_D = 4$. Поэтому

$$P(D) = \frac{4}{34 \cdot 35 \cdot 6} = \frac{1}{1785} \cong 0{,}00056.$$

Задача 2.16. Группа из восьми студентов с разными именами рассаживается на скамье, установленной с одной стороны прямоугольного стола. Какова вероятность того, что Маша и Саша окажутся сидящими рядом?

Решение. Обозначим событие, вероятность которого нужно подсчитать, через A. Число всех возможных исходов эксперимента равно числу упорядоченных выборок из восьми элементов по восемь, т. е. числу перестановок из восьми студентов:

$$n = P_8 = 8!.$$

Разобьем подсчет числа m_A благоприятных исходов на несколько простых шагов и воспользуемся принципом умножения. Обозначим белым кружком пару "Маша + Саша", а каждого из оставшихся шести студентов — черным кружком и воспользуемся схемой, приведенной на рис. 2.7. Из рисунка видно, что наша пара может занять место среди шести студентов семью различными способами (действие первое). В самой паре Маша и Саша могут сесть $P_2 = 2! = 2$, т. е. двумя способами (действие второе). Кроме того, для остальных шести студентов есть $P_6 = 6!$ возможностей разместиться за столом при фиксированном положении пары (действие третье).

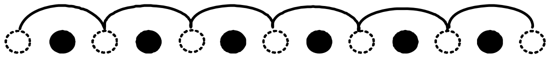

Рис. 2.7

Следовательно, по принципу умножения (1.1) число благоприятных исходов равно произведению этих трех чисел, т. е.

$$m_A = 2 \cdot 6! \cdot 7 .$$

Тогда по формуле классической вероятности (2.2) вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6! \cdot 7}{8!} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} .$$

Замечание

Задачи 2.17—2.25 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.17. В урне 10 белых шаров и 5 красных. Шары в урне перемешиваются, а затем вынимаются два шара. Какова вероятность, что оба будут красными?

Задача 2.18. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков будет равна 18? Будет равна 15?

Задача 2.19. В магазин поступили 30 ноутбуков, два из которых — бракованные. Для проверки выбирают три. Найти вероятность того, что: 1) все они окажутся без брака; 2) два будут бракованные; 3) один будет бракованным; 4) хотя бы один будет бракованным.

Задача 2.20. В коллективе из 5 мужчин и 20 женщин выбирают трех человек делегатами на конференцию. Каждый может быть выбран с одинаковой вероятностью. Какова вероятность, что среди отобранных лиц окажутся две женщины?

Задача 2.21. Из множества натуральных чисел $\{1, 2, ..., 10\}$ случайно выбираются два числа. Найти вероятность того, что они оба меньше девяти.

Задача 2.22. В колоде из 36 карт наугад вынимают две карты. Какова вероятность, что одна из них окажется дамой, а другая пиковой масти?

Задача 2.23. Ребенок играет с шестью буквами азбуки: К, А, А, Е, Р, Т. Какова вероятность, что он случайно сложит слово РАКЕТА? Слово РАК?

Задача 2.24. Туристическая группа из пятнадцати человек заселяется в гостиницу, где есть один четырехместный, три трехместных и один двухместный номер. Какова вероятность, что два определенных человека окажутся в двухместном номере?

Задача 2.25. Монета брошена три раза. Найти вероятность появления двух гербов и одной решетки: 1) именно в таком порядке; 2) в любом порядке.

Вероятностная модель случайного эксперимента со счетным числом исходов

Вероятностной моделью эксперимента со счетным числом исходов служит бесконечное вероятностное пространство

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n & \dots \\ P(\omega_1) & P(\omega_2) & \dots & P(\omega_n) & \dots \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ — исходы эксперимента (элементарные события); $P(\omega_1)$, $P(\omega_2), \dots, P(\omega_n), \dots$ — аксиоматически приписанные исходам вероятности, для которых справедливы:

- $P(\omega_i) \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$ — *аксиома неотрицательности*;
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1$ — *аксиома нормированности*, которая в данном случае означает, что числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(\omega_i)$ сходится и сумма его равна единице.

Вероятностью произвольного события $A \in \Im (A \subset \Omega)$ в вероятностной модели со счетным числом исходов называется число, определяемое формулой (2.1). При этом следует иметь в виду, что в этой модели в событие A может входить бесконечное число исходов. В этом случае формула (2.1) означает, что вероятность $P(A)$ есть сумма сходящегося числового ряда.

Замечание 1

В случае эксперимента со счетным числом исходов система $\Im$ всех подмножеств из Ω замкнута относительно счетного числа введенных на ней операций сложения и умножения. Такая система подмножеств $\Im$ называется σ-*алгеброй.*

Замечание 2

Легко убедиться, что определенная (2.1) вероятность $P(A)$ в случае пространства со счетным числом исходов удовлетворяет трем аксиомам:

P1. аксиоме неотрицательности: $P(A) \ge 0 \quad \forall A \in \Im$;

P2. аксиоме нормированности: $P(\Omega) = 1$;

P3. аксиоме счетной аддитивности: если события $A_i \in \Im$ при $i = 1, 2, \dots$ несовместны, то $P\left(\sum\limits_i A_i\right) = \sum\limits_i P(A_i)$.

Задача 2.26. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания. Найти вероятность того, что:

1) он попадет при четвертом броске;

2) он попадет в корзину до пятого броска;

3) он попадет в корзину после четвертого броска;

4) он попадет в корзину на четном броске.

Решение. Пространство элементарных событий рассматриваемого эксперимента будет бесконечным, поскольку опыт может продолжаться как угодно долго. Это пространство является счетным, поскольку исходы можно пронумеровать, т. е. $\omega_1 = \text{П}$ — баскетболист попал с первого броска, $\omega_2 = \text{НП}$ — баскетболист попал со второго броска, ..., $\omega_n = \underbrace{\text{НН}\cdots\text{Н}}_{n-1}\text{П}$ — баскетболист попал с n-го броска. Следовательно,

$$\Omega = \{(\text{П});\ (\text{Н, П});\ (\text{Н, Н, П}); \ldots;\ (\underbrace{\text{Н, Н, ..., Н}}_{n-1}, \text{П});\ \ldots\}.$$

Поставим в соответствие каждому элементарному событию (исходу) ω_n вероятность $P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$. Тогда вероятностное пространство эксперимента примет вид:

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{П}) & (\text{Н, П}) & (\text{Н, Н, П}) & (\text{Н, Н, Н, П}) & \ldots & (\underbrace{\text{Н, Н, ..., Н}}_{n-1}, \text{П}) & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \ldots & \frac{1}{2^n} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при этом аксиомы неотрицательности и счетной аддитивности выполнены. Проверим аксиому нормированности:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Построенное вероятностное пространство дает возможность вычислить вероятность всех интересующих нас событий.

1) Событие A — баскетболист попадет при четвертом броске — содержит один исход $A = (\text{Н, Н, Н, П})$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

2) Пусть событие B — баскетболист попадает в корзину до пятого броска. Тогда

$$B = \{(\text{П});\ (\text{Н, П});\ (\text{Н, Н, П});\ (\text{Н, Н, Н, П})\}.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}.$$

3) Если событие C — он попадает в корзину после четвертого броска, то

$$C = \{(\text{Н, Н, Н, Н, П});\ (\text{Н, Н, Н, Н, Н, П}); \ldots;\ (\underbrace{\text{Н, Н, ..., Н}}_{n-1}, \text{П});\ \ldots\}$$

и поэтому

$$P(C)=\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\cdots=\frac{\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}.$$

4) Если событие D — он попадает в корзину на четном броске, то

$$D=\{(\text{Н, П});\ (\text{Н, Н, Н, П});\ (\text{Н,Н, Н, Н, Н, П});\ ...\},$$

и поэтому

$$P(D)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Вероятностная модель случайного эксперимента с несчетным числом исходов

Если случайный эксперимент имеет несчетное количество исходов, то не удается построить вероятностное пространство, приписав вероятности отдельным исходам и через эти вероятности определять вероятность произвольного события.

В этом случае математической моделью эксперимента служит вероятностное пространство $\langle \Omega, \Im, P \rangle$, где:

- ❒ Ω — пространство элементарных событий (исходов);
- ❒ $\Im$ — σ-алгебра подмножеств $A \subset \Omega$, которые мы объявляем событиями, а те подмножества Ω, которые не входят в построенную σ-алгебру, не считаем событиями.

Пусть $P = P(A)$ при $A \in \Im$ — неотрицательная числовая функция, заданная на σ-алгебре $\Im$ и удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

P1. аксиоме неотрицательности: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Im$;

P2. аксиоме нормированности: $P(\Omega) = 1$;

P3. аксиоме счетной аддитивности: если события $A_i \in \Im$ при $i = 1, 2, ...$ несовместны, то $P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$.

В этом случае $P(A)$ называют *вероятностью события* A *(вероятностной мерой).*

Геометрическое определение вероятности

Простейшим примером вероятностной модели с несчетным числом исходов служит так называемая "геометрическая вероятность".

Если Ω — множество конечной длины, площади или объема (т. е. мера множества $\Omega < +\infty$), $\Im$ — σ-алгебра его подмножеств, имеющих соответственно длину, площадь или объем, а случайный эксперимент состоит в "бросании" точки во множество Ω, причем все исходы эксперимента равновозможные, то вероятность попадания в произвольное множество $A \subset \Omega$ ($A \in \Im$) определяется по формуле

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) является *геометрическим определением вероятности.*

Замечание

Легко понять, что геометрическое определение вероятности является обобщением классического на случай несчетного количества исходов эксперимента.

Задача 2.27. На отрезок длины 10 см наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до концов отрезка больше, чем 1 см.

Решение. Исходы эксперимента — точки $x \in [0;10] \subset R$, поэтому пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\ x \mid x \in [0;\ 10]\},$$

а интересующее нас событие A имеет вид:

$$A = \{\ x \mid x \in [1;\ 9]\}.$$

На рис. 2.8 это множество заштриховано.

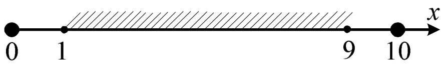

Рис. 2.8

Поскольку множества Ω и A являются отрезками числовой оси, то мерой этих множеств являются их длины. Тогда по формуле (2.3) искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Задача 2.28 (задача о встрече). Страховой агент пригласил для продления договора страхования двух клиентов в офис в промежуток времени между 10 и 11 часами. Найти вероятность того, что ни один из клиентов не будет ждать, пока освободится страховой агент, если для оформления необходимых документов требуется 10 минут.

Решение. Пусть $t_1 = 10 + x$ — время в часах прихода первого клиента, а $t_2 = 10 + y$ — время в часах прихода второго. Ясно, что $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Изобразим точками отрезка $[0;\ 1]$ оси Ox все возможные моменты прихода первого клиента после 10 часов, а точками отрезка $[0;\ 1]$ оси Oy — все возможные моменты прихода после 10 часов второго клиента. Точка $(x;\ y)$ — исход эксперимента — является элементарным событием, состоящим в том, что первый клиент пришел в момент времени $10+x$, а второй — в момент времени $10+y$. Пространство элементарных событий имеет вид:

$$\Omega=\{\,(x;\,y)|\;x\in[0;\,1],\,y\in[0;\,1]\,\},$$

т. е. представляет собой квадрат со стороной 1 (рис. 2.9).

Пусть A — интересующее нас событие. Условием его наступления является выполнение неравенства:

$$|x-y|>\frac{1}{6},\text{ т. е. } A=\left\{\,(x;\,y)\middle|\,|x-y|>\frac{1}{6}\,\right\}.$$

Поскольку

$$|x-y|>\frac{1}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y>\frac{1}{6}\\ x-y<-\frac{1}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y<x-\frac{1}{6}\\ y>x+\frac{1}{6}\end{array}\right.,$$

то событию A можно поставить в соответствие заштрихованную область, часть которой лежит выше прямой $y=x+\frac{1}{6}$, а другая часть — ниже прямой $y=x-\frac{1}{6}$ (см. рис. 2.9).

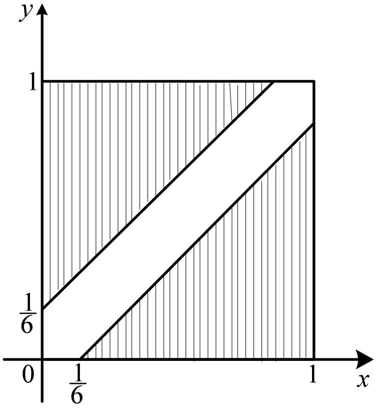

Рис. 2.9

Следовательно, случайный эксперимент можно моделировать как "бросание" точки в квадрат со стороной 1, а интересующее нас событие — как попадание бросаемой точки в заштрихованную область A.

Это позволяет применить формулу геометрической вероятности (2.3), выбирая в качестве меры построенных множеств их площадь. Вычисляя площадь заштрихованной области как площадь квадрата со стороной $5/6$, получим:

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1^2}=\frac{25}{36}.$$

Задача 2.29. Взяты наугад два положительных не превосходящих единицы числа. Какова вероятность того, что их сумма не больше единицы, а их произведение не больше 2/9?

Решение. Пусть x и y — описанные в условии дроби. Их возможные значения: $x\in(0;\,1]$, $y\in(0;\,1]$. Множество возможных исходов эксперимента по выбору двух дробей — множество точек плоскости с координатами $(x;\,y)$, заполняющих квадрат (рис. 2.10)

$$\Omega=\{\,(x;y)|\;x\in(0;1],\,y\in(0;1]\,\},$$

площадь которого $S(\Omega)=$ мера $\Omega=1$.

Пусть A — интересующее нас событие. Тогда благоприятствующие ему исходы представляют собой заштрихованную фигуру на рис. 2.10, которая описывается системой неравенств:

$$A = \left\{ (x;y) \middle| \, x + y \le 1;\, x \cdot y \le \frac{2}{9} \right\}.$$

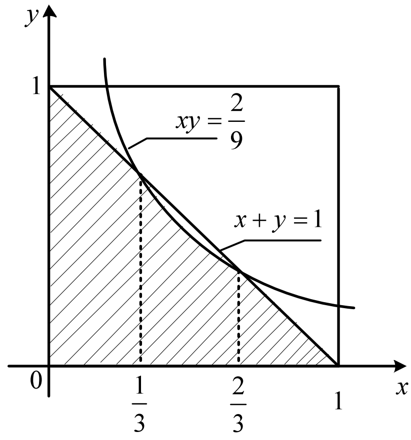

Рис. 2.10

Линии $x + y = 1$ и $xy = \frac{2}{9}$ пересекаются в точках

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Поэтому площадь заштрихованной фигуры вычисляется как сумма трех определенных интегралов:

$$S(A) = \text{мера } A = \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - x)\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x}\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (1 - x)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2\,.$$

По формуле (2.3) вероятность события A определяется из соотношения

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2 \approx 0{,}487\,.$$

Задача 2.30. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние 6 см, наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых.

Решение. Задача сводится к бросанию точки (центра круга) на отрезок прямой длиной 6 см (расстояние между параллельными прямыми указаны на рис. 2.11). Все исходы такого эксперимента равновозможные, поскольку круг бросается наудачу.

Пусть $\Omega = \{\, x \,|\, x \in [0; 6] \,\}$ — соответствующее пространство элементарных событий. Обозначим через A интересующее нас событие. Очевидно, что круг не будет пересекать прямую тогда и только тогда, когда его центр будет расположен не ближе, чем 1 см от прямой, т. е. от концов отрезка Ω. Это значит, что наступлению события A благоприятствуют исходы, лежащие между 1 и 5:

$$A = \{ x \,|\, x \in [1;\ 5] \}.$$

Поскольку мера $\Omega = 6$, а мера $A = 4$, то, используя формулу геометрической вероятности (2.3), получим:

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

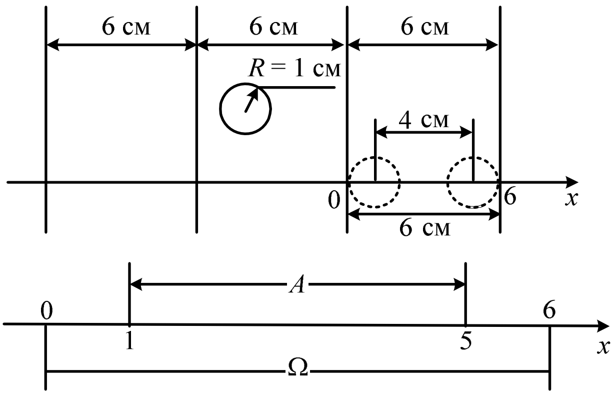

Рис. 2.11

Задача 2.31. Через случайно выбранную точку на окружности радиуса R проводятся хорды, перпендикулярные некоторому фиксированному диаметру. Какова вероятность того, что длина хорды будет не больше, чем радиус окружности?

Решение. Перпендикулярная диаметру хорда проводится через точку x, случайно выбранную на окружности. Это означает, что $x \in [0, 2\pi R]$ — множество всех исходов эксперимента Ω, т. е.

$$\Omega = \{x | 0 \le x \le 2\pi R\}.$$

Для того чтобы длина соответствующей хорды была не больше радиуса окружности (событие A), точка x должна принадлежать дуге AB или дуге CD, таким, что треугольники ΔAOB и ΔCOD — правильные, т. е. $\angle AOB = 60°$ и $\angle COD = 60°$ (рис. 2.12, *а*). Следовательно, множество исходов, благоприятствующих событию A (рис. 2.12, *б*), имеет вид:

$$A = \left\{ x \middle| 0 \le x \le \frac{\pi}{6}R, \frac{5\pi}{6}R \le x \le \frac{7\pi}{6}R, \frac{11\pi}{6}R \le x \le 2\pi R \right\}.$$

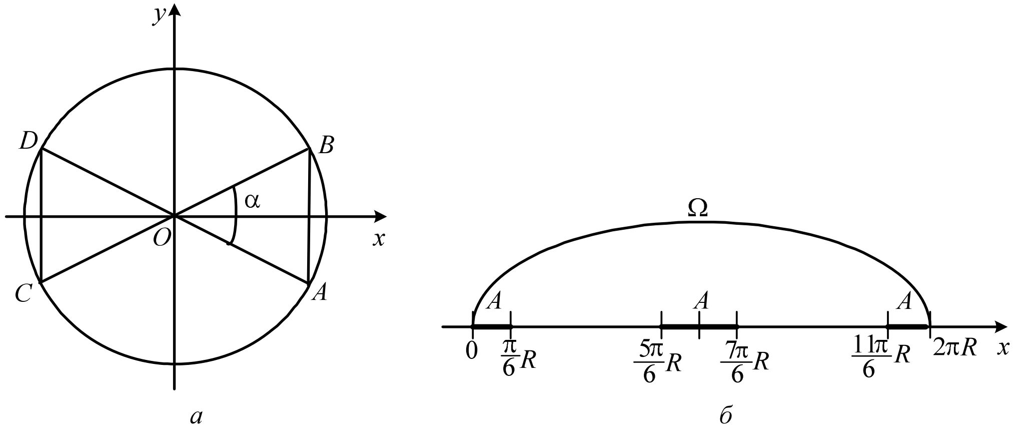

Рис. 2.12

Поскольку множества Ω и A — отрезки числовой прямой (см. рис. 2.12, *б*), то мерами этих множеств будут длины отрезков. Поэтому

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{\frac{2}{3}\pi R}{2\pi R} = \frac{1}{3} \cong 0{,}3333 .$$

Замечание

Задачи 2.32—2.37 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.32. Найти вероятность того, что из двух случайно выбранных положительных чисел, не превосходящих единицы, одно больше квадрата другого.

Задача 2.33. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг радиуса R, попадет в квадрат, вписанный в этот круг?

Задача 2.34. Числа a и b равновозможные в квадрате $|a| \le 2$, $|b| \le 2$. Найти вероятность того, что их сумма больше 1.

Задача 2.35. Найти вероятность того, что точка, случайным образом поставленная внутрь квадрата со стороной 2 см, окажется ниже параболы, проходящей через две вершины этого квадрата и середину противоположной им стороны.

Задача 2.36. На отрезке AB длины 10 см наудачу поставлены две точки M и N. Найти вероятность того, что точка M будет ближе к точке N, чем к точке A.

Задача 2.37. Найти вероятность того, что сумма двух положительных, не превосходящих единицы чисел, меньше 1/3 или больше 1.

2.4. Свойства вероятности. Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения

Свойства вероятности. Теорема сложения вероятностей

Из определения и аксиом вероятности следуют ее свойства.

Свойство 1.
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$
т. к.

$$\begin{cases} A + \overline{A} = \Omega \\ A \cdot \overline{A} = \varnothing \end{cases}$$

и по аксиомам аддитивности и нормированности $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$.

Свойство 2.
$$P(\varnothing) = 0,$$

т. к. $\Omega = \Omega + \varnothing$ и по аксиомам аддитивности и нормированности $\underbrace{P(\Omega)}_{=1} = \underbrace{P(\Omega)}_{=1} + P(\varnothing)$.

Свойство 3. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$ и $P(B-A) = P(B) - P(A)$,

т. к. $B = \underbrace{A + (B-A)}_{\text{несовместные}} \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B-A) \ge P(A)$.

Из свойств вероятности следует *теорема сложения*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{2.4}$$

Замечание

Если события A и B несовместны, т. е. $A \cdot B = \varnothing$, то теорема сложения имеет вид:

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \tag{2.5}$$

что соответствует аксиоме аддитивности **Р.3.**

Задача 2.38. В партии из 25 изделий содержится 15 изделий первого сорта и 10 изделий второго сорта. Случайным образом выбираются три изделия. Найти вероятность того, что хотя бы одно из этих изделий первого сорта.

Решение. Если обозначить через A событие, которое означает, что хотя бы одно из взятых трех изделий первого сорта, то событие $\overline{A}$ — все три взятые изделия второго сорта. Поскольку по формуле классической вероятности (2.2) $P(\overline{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{25}^3} = \frac{6}{115}$, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{6}{115} = \frac{109}{115} \cong 0{,}948.$$

Задача 2.39. Восемь шариков красного и белого цвета пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Шарики с номерами от 1 до 4 — красные, а с номерами от 5 до 8 — белые. Случайным образом выбирают один шарик. Найти вероятность того, что он красного цвета или его номер делится на 4.

Решение. Пусть событие A — взятый шарик красного цвета, а событие B — взят шарик с номером, кратным 4. Интересующее нас событие является суммой событий $A + B$. Тогда по теореме сложения (2.4)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Поскольку из восьми шариков четыре красных, то

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

а т. к. из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 два (4 и 8) делятся на 4, то

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Произведением событий AB является событие, которое состоит в том, что взят красный шарик с номером 4. Поэтому

$$P(AB) = \frac{1}{8}.$$

Подставляя все вычисленные вероятности в формулу для вероятности суммы событий $A+B$, получим

$$P(A+B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

Задача 2.40. Определить вероятность того, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании половины всей партии, если по условиям приема допускается бракованных изделий не более одного из пятидесяти.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что при испытании не обнаружено ни одного бракованного изделия, а через B — событие, состоящее в том, что обнаружено ровно одно бракованное изделие. Интересующее нас событие $C=A+B$. Поскольку события A и B несовместны ($A\cdot B=\varnothing$), то для вычисления вероятности события C можно воспользоваться теоремой сложения для несовместных событий (2.5):

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Для вычисления вероятностей событий A и B воспользуемся классическим определением вероятности, положив $n=C_{100}^{50}$, $m_A=C_{95}^{50}$, $m_B=C_5^1\cdot C_{95}^{49}$.

Тогда $P(C)=P(A)+P(B)=\dfrac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\dfrac{C_5^1\cdot C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}\approx 0{,}0281+0{,}1529\approx 0{,}181$.

Замечание

Задачи 2.41—2.43 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.41. Из колоды 36 карт случайным образом берут одну карту. Какова вероятность, что это дама или карта пиковой масти?

Задача 2.42. Бросают три монеты. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет герб.

Задача 2.43. Из последовательности натуральных чисел от 1 до 10 выбирают случайно одно число. Чему равна вероятность того, что это число четное или делится на 3?

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Определение 2.11. Пусть A и B — случайные события и $P(B)>0$. *Условной вероятностью* наступления события A, при условии, что событие B произошло, называется число, которое определяется формулой

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}. \tag{2.6}$$

Аналогично определяется условная вероятность наступления события B при условии, что событие A с вероятностью $P(A) > 0$ произошло

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}. \qquad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) следуют формулы

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B), \quad P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A), \qquad (2.8)$$

которые называются *теоремой умножения* для двух событий.

Для n событий $A_1, A_2, ..., A_n$ теорема умножения имеет вид:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}). \qquad (2.9)$$

Независимые события

Определение 2.12. Пусть $P(A) > 0$. Событие B называется *независимым* от события A, если $P(B|A) = P(B)$, т. е. если наступление события A не меняет вероятности события B.

Можно показать, что если событие B не зависит от события A, то и A не зависит от B, и справедливо равенство $P(A|B) = P(A)$ в предположении, что $P(B) > 0$, т. е. свойство независимости событий взаимно.

Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.10)$$

Замечание 1

Равенство (2.10) может быть взято за определение независимости событий.

Определение 2.13. События A и B называются *независимыми*, если вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей каждого из этих событий, т. е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Замечание 2

Если события A и B независимы, то пары событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ тоже независимы.

Определение 2.14. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если:

$P(A_k \cdot A_l) = P(A_k) \cdot P(A_l)$, для любых натуральных $k < l < n$;

$P(A_k \cdot A_l \cdot A_m) = P(A_k) \cdot P(A_l) \cdot P(A_m)$, для любых натуральных $k < l < m < n$;

. . . .

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Определение 2.15. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно независимыми*, если

$$P(A_i \cdot A_k) = P(A_i) \cdot P(A_k)$$

для всех $i = 1, 2, ..., n$, $k = 1, 2, ..., n$, $k \neq i$.

Замечание 3

Если события независимы в совокупности, то они попарно независимы. Из попарной независимости событий еще не следует их независимость в совокупности. Доказательством этому может быть следующая задача.

Задача 2.44. На книжной полке имеются четыре книги с романами Ф. М. Достоевского. Одна книга с романом "Идиот", вторая — с романом "Преступление и наказание", третья — с романом "Братья Карамазовы". Четвертая книга содержит все три романа. Случайным образом с полки берут одну книгу. Событие A — в этой книге есть роман "Идиот", событие B — в этой книге есть роман "Преступление и наказание", событие C — в этой книге есть роман "Братья Карамазовы". Являются ли события A, B и C попарно независимыми? Независимыми в совокупности?

Решение. Поскольку всего четыре книги, а книг, содержащих каждый из романов, две, то по формуле классической вероятности

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Поскольку только в одной книге есть два романа Ф. М. Достоевского, то

$$P(A \cdot B) = P(B \cdot C) = P(A \cdot C) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, события A, B и C попарно независимы. Однако независимыми в совокупности они не являются, т. к.

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Однако только одна книга из четырех содержит все три романа, поэтому

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{4}.$$

Задача 2.45. Банк предлагает клиентам два типа вкладов. Вероятность того, что годовой доход по вкладу первого типа превысит 20%, равна 0,6, а вероятность того же события для вклада второго типа равна 0,8. Некто сделал два вклада разных типов. Определить вероятность того, что хотя бы по одному из вкладов доходность превысит 20%. Предполагается, что доходности вкладов разных типов не зависят друг от друга.

Решение. Обозначим через A интересующее нас событие — доходность хотя бы по одному из двух вкладов превысила 20%, через B — событие, состоящее в том, что доходность по вкладу первого типа превысила 20%, через C — событие, состоящее в том, что доходность по вкладу второго типа превысила 20%. Тогда $P(B)=0{,}6$, а $P(C)=0{,}8$. Очевидно, что $A=B+C$, и по теореме сложения (2.4) справедливо:

$$P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B\cdot C).$$

События B и C по условию независимы, поэтому по теореме умножения для независимых событий (2.10) справедливо $P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C)$. Следовательно:

$$P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B)\cdot P(C)=0{,}6+0{,}8-0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}92.$$

Задача 2.46. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, вынимают два шара. Найти вероятность того, что:

1) оба шара белые (использовать два способа решения);

2) хотя бы один из них черный.

Решение. 1) Пусть A — событие, состоящее в том, что оба вынутых шара оказались белого цвета. Найдем его вероятность двумя способами.

1-й способ. Обозначим через A_1 событие, которое состоит в том, что первый вынутый шар оказался белого цвета, а через A_2 — событие, состоящее в том, что белого цвета оказался второй вынутый шар. Интересующее нас событие состоит в одновременном наступлении этих событий, т. е. $A=A_1\cdot A_2$, поэтому для вычисления его вероятности можно воспользоваться теоремой умножения (2.8):

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1).$$

Для вычисления $P(A_1)$ воспользуемся классическим определением вероятности, положив $n=10$, а $m_{A_1}=3$, поскольку до первого изъятия в урне находилось 10 шаров, из которых 3 белые. По формуле классической вероятности (2.2) получим $P(A_1)=3/10$.

Условную вероятность $P(A_2|A_1)$ найдем, учитывая, что перед вторым изъятием в урне находится 9 шаров, среди которых 2 белых. Поэтому $P(A_2|A_1)=\frac{2}{9}$. Искомая вероятность равна произведению найденных вероятностей, т. е.

$$P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}.$$

2-й способ. Воспользуемся классическим определением вероятности. Исходами данного эксперимента являются всевозможные пары шаров, отличающиеся только составом. При этом все исходы равновозможные. Всего исходов $n=C_{10}^2$, а наступлению события A благоприятствует $m_A = C_3^2$ исходов. По формуле классической вероятности (2.2) получим:

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3 \cdot 2! \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

2) Пусть B — событие, состоящее в том, что хотя бы один из двух вынутых шаров черный. Очевидно, что это событие является противоположным событию A, т. е. $B = \overline{A}$. Используя первое из вероятностей, вычислим:

$$P(B) = P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

Задача 2.47. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, у кого первого выпадет герб. Найти вероятности событий: 1) игра закончится до четвертого хода; 2) выиграет первый игрок, если исходы бросаний независимы.

Решение. Обозначим события:

- A_i — у первого игрока выпал герб на i-м бросании;
- B_k — у второго игрока выпал герб на k-м бросании.

Тогда:

- $\overline{A}_i$ — у первого игрока выпала решетка на i-м бросании;
- $\overline{B}_k$ — у второго игрока выпала решетка на k-м бросании.

1) Пусть событие C состоит в том, что игра закончится до четвертого бросания. Это означает, что произошла сумма несовместных событий:

- A_1 — у первого при первом ходе выпал герб;
- $\overline{A}_1 \cdot B_1$ — у первого при первом ходе выпала решетка, а у второго — герб;
- $\overline{A}_1 \cdot \overline{B}_1 \cdot A_2$ — у первого и у второго при первом ходе выпала решетка, а при втором бросании у первого выпал герб;
- $\overline{A}_1 \cdot \overline{B}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot B_2$ — первый герб выпал у второго игрока при втором бросании;
- $\overline{A}_1 \cdot \overline{B}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{B}_2 \cdot A_3$ — первый герб выпал у первого игрока при третьем бросании;
- $\overline{A}_1 \cdot \overline{B}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot B_3$ — первый герб выпал у второго игрока при третьем бросании.

Тогда

$$C = A_1 + \overline{A}_1 B_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 B_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 \overline{A}_3 B_3.$$

Поскольку события A_i, $\overline{A}_i$, B_k и $\overline{B}_k$ независимы, а выпадение герба или решетки происходит с вероятностью $1/2$, то по теоремам сложения и умножения для несовместных и независимых событий получим:

$$P(C)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}.$$

2) Пусть событие D состоит в том, что выиграл первый игрок. Выигрыш первого означает, что у второго игрока при каждом бросании выпадает решетка. Тогда

$$D=A_1+\overline{A}_1\cdot\overline{B}_1\cdot A_2+\overline{A}_1\cdot\overline{B}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{B}_2\cdot A_3+\ldots$$

$$P(D)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(A_2)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(A_3)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

Мы воспользовались здесь формулой суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Замечание

Задачи 2.48—2.57 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.48. Из урны, содержащей пять белых и четыре черных шара, вынули два шара. Какова вероятность, что один из них белый, а другой — черный.

Задача 2.49. В коробке 10 катушек с красными нитками и 6 катушек с синими нитками. Выбираются наудачу две катушки. Найти вероятность того, что нитки будут одинакового цвета.

Задача 2.50. На семи карточках написаны буквы: С, С, О, О, М, М, М. Случайно выбирают из них три карточки и выкладывают в ряд слева направо. Найти вероятность, что получится слово СОМ.

Задача 2.51. Бросаются три игральные кости. Найти вероятность, что хотя бы на одной из них выпадет 6 очков, если на них выпали разные грани.

Задача 2.52. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

Задача 2.53. У студента на книжной полке стоят десять учебников, из которых четыре по теории вероятностей. Он случайно уронил с полки три учебника. Найти вероятность того, что два из них по теории вероятностей.

Задача 2.54. Найти вероятность того, что при пяти бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет герб.

Задача 2.55. Два элемента прибора, дублирующих друг друга, выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3 и 0,2 соответственно. Какова вероятность того, что прибор будет работать?

Задача 2.56. Среди 50 электрических лампочек 5 являются нестандартными. Найти вероятность того, что из трех взятых случайно лампочек две лампочки нестандартные.

Задача 2.57. В урне 5 белых и 7 красных шаров. Из урны наудачу вынимают два шара. Найти вероятность, что: 1) оба шара белые; 2) шары одинакового цвета; 3) оба белые, если известно, что вынули шары одинакового цвета.

2.5. Полная группа событий. Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ — вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Определение 2.16. Говорят, что события $H_1, H_2, ..., H_n \in \Im$ образуют *полную группу*, если:

- $H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, т. е. они попарно несовместны;
- $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, т. е. их сумма равна множеству исходов данного эксперимента (достоверному событию).

Если событие $A \in \Im$ и известны вероятности $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ событий $H_1, H_2, ..., H_n \in \Im$, образующих полную группу, а также условные вероятности $P(A|H_i)$ при всех $i = 1, 2, ..., n$, то имеет место формула:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i), \tag{2.11}$$

которая называется *формулой полной вероятности.*

В этой формуле $P(A)$ называется *полной вероятностью* события A, события H_i — *гипотезами*, а вероятности $P(H_i)$ — их *априорными* (вычисленными до опыта) вероятностями.

Если известно, что событие A произошло и вычислена полная вероятность этого события, то условные вероятности событий H_k, $k = 1, 2, ..., n$ при условии, что событие A произошло, вычисляются по формуле

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}, \tag{2.12}$$

которая называется *формулой Байеса*, а вероятности $P(H_k|A)$, $k = 1, 2, ..., n$ — *апостериорными* (вычисленными после опыта) вероятностями гипотез.

Задача 2.58. В первой урне 8 белых и 2 черных шара. Во второй урне 4 белых и 14 черных шаров. Из каждой урны взяли по одному шару, а затем оставшиеся ссыпали в третью пустую урну. Найти вероятность того, что взятый после этого из третьей урны шар белый.

Решение. Рассмотрим события:

- H_1 — гипотеза, которая состоит в том, что из обеих урн вынули по белому шару;

- ❒ H_2 — гипотеза, которая состоит в том, что из обеих урн вынули по черному шару;
- ❒ H_3 — гипотеза, которая состоит в том, что из одной урны взяли белый шар, из другой — черный;
- ❒ A — интересующее нас событие, которое состоит в том, что взятый после этого из третьей урны шар белый.

Чтобы вычислить вероятности гипотез, введем в рассмотрение события:

- ❒ $Ч_i$, $i = 1, 2$ — из i-й урны вынут черный шар;
- ❒ $Б_i$, $i = 1, 2$ — из i-й урны вынут белый шар.

Легко видеть, что

$$H_1 = Б_1 \cdot Б_2,\ H_2 = Ч_1 \cdot Ч_2,\ H_3 = Б_1 \cdot Ч_2 + Ч_1 \cdot Б_2,$$

где события-сомножители независимы, а события-слагаемые несовместны. Учитывая это, по формуле классической вероятности (2.2) и теорем сложения (2.5) и умножения (2.10), получим

$$P(H_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{18} = \frac{8}{45},\ P(H_2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{14}{18} = \frac{7}{45},$$

$$P(H_3) = \frac{8}{10} \cdot \frac{14}{18} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{18} = \frac{28}{45} + \frac{2}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

Ясно, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий, т. к. они попарно несовместны и справедливо равенство

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{8}{45} + \frac{7}{45} + \frac{2}{3} = 1.$$

Поскольку в двух урнах было 28 шаров, а два из них вынули, то в третьей урне оказалось 26 шаров. Состав шаров в третьей урне зависит от того, какая гипотеза из трех реализовалась в эксперименте.

В условиях первой гипотезы, если вынули два белых шара, в третьей урне осталось 10 белых шаров. Поэтому

$$P(A|H_1) = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}.$$

В условиях второй гипотезы в третьей урне оказалось 12 белых шаров, поэтому

$$P(A|H_2) = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}.$$

В условиях третьей гипотезы в третьей урне оказалось 11 белых шаров, поэтому

$$P(A|H_3) = \frac{11}{26}.$$

Используя формулу полной вероятности (2.11) при $n = 3$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3),$$

вычислим полную вероятность события A:

$$P(A) = \frac{8}{45} \cdot \frac{5}{13} + \frac{7}{45} \cdot \frac{6}{13} + \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{26} \approx 0,4222.$$

Задача 2.59. Два приятеля покупают билеты лотереи, в которой всего 96 билетов, из которых 6 — выигрышные. Кто из них с большей вероятностью купит выигрышный билет: тот, кто будет выбирать первым или вторым?

Решение. Обозначим события: A — первый купил выигрышный билет, B — второй купил выигрышный билет. По формуле классической вероятности (2.2):

$$P(A) = \frac{6}{96} = \frac{1}{16}.$$

Для вычисления вероятности события B используем формулу полной вероятности (2.11). Событие B происходит вместе с одним из двух событий-гипотез: H_1 — первым был куплен выигрышный билет, H_2 — первым был куплен невыигрышный билет. Очевидно, что

$$P(H_1) = \frac{6}{96} = \frac{1}{16}, \ P(H_2) = \frac{90}{96} = \frac{15}{16}.$$

Второй выбирает лотерейный билет из 95 оставшихся билетов. В условиях гипотезы H_1 выигрышных билетов среди них 5, а в условиях гипотезы H_2 — 6. Поэтому соответствующие условные вероятности равны:

$$P(B|H_1) = \frac{5}{95}, \ P(B|H_2) = \frac{6}{95}.$$

По формуле полной вероятности (2.11) при $n = 2$:

$$P(B) = P(H_1) \cdot P(B|H_1) + P(H_2) \cdot P(B|H_2) = \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{95} + \frac{15}{16} \cdot \frac{6}{95} = \frac{95}{16 \cdot 95} = \frac{1}{16}.$$

Следовательно, вероятность купить выигрышный билет одинакова для обоих.

Задача 2.60. При пусконаладочных работах автоматическая линия настраивается с помощью точной, но дорогостоящей аппаратуры так, что 96% выпускаемых этой линией деталей удовлетворяет стандарту. Упрощенный контроль признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,98, а нестандартную деталь — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что деталь, прошедшая упрощенный контроль и признанная пригодной, является стандартной.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что деталь прошла упрощенный контроль и признана годной. Это событие могло произойти одновременно с одной из двух гипотез:

- гипотеза H_1 — деталь стандартная;
- гипотеза H_2 — деталь нестандартная.

Известно, что 96% продукции удовлетворяет стандарту. Это означает, что из 100 деталей 96 стандартных и 4 нестандартных. Поэтому вероятности гипотез равны:

$$P(H_1) = 0{,}96\,,\ P(H_2) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04\,.$$

Условные вероятности наступления события A для стандартной и нестандартной деталей известны из условия задачи:

$$P(A|H_1) = 0{,}98\,,\ P(A|H_2) = 0{,}05\,.$$

Полная вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) = 0{,}96\cdot 0{,}98 + 0{,}04\cdot 0{,}05 = 0{,}9428\,.$$

Нас интересует вероятность того, что деталь будет стандартной (событие H_1) при условии, что она прошла упрощенный контроль (событие A произошло). Эту апостериорную вероятность можно вычислить по формуле Байеса (2.12):

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}9408}{0{,}9428} \approx 0{,}998\,.$$

Задача 2.61. В магазин поступает продукция с трех предприятий, причем с первых двух предприятий поступает одинаковое количество изделий, а с третьего — в два раза большее, чем с каждого из первых двух. Известно, что в продукции первого предприятия 0,2% брака, в продукции второго — 0,3% брака, а у третьего предприятия — 0,1% бракованных изделий.

1) Какова вероятность покупки в магазине бракованного изделия?

2) Купленное в магазине изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно изготовлено на третьем предприятии?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в магазине было куплено бракованное изделие. Это событие могло произойти одновременно с одной из трех несовместных гипотез:

- гипотеза H_1 — изделие изготовлено на первом предприятии;
- гипотеза H_2 — изделие изготовлено на втором предприятии;
- гипотеза H_3 — изделие изготовлено на третьем предприятии.

С первых двух предприятий поступает одинаковое количество изделий, а с третьего — в два раза большее. Поэтому априорные вероятности гипотез связаны следующими соотношениями:

$$P(H_1) = P(H_2)\,,\ P(H_3) = 2P(H_1)\,.$$

Поскольку гипотезы образуют полную группу событий, то должно выполняться условие

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1\,,$$

из которого следует, что $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{4} = 0{,}25\,,\ P(H_3) = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$

Условные вероятности появления события A заданы:

$$P(A|H_1)=\frac{0,2}{100}=0,002\,,\ P(A|H_2)=\frac{0,3}{100}=0,003\,,\ P(A|H_3)=\frac{0,1}{100}=0,001\,.$$

1) Теперь, используя формулу полной вероятности (2.11), можно дать ответ на первый вопрос задачи:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+P(H_3)\cdot P(A|H_3)=$$
$$=0,25\cdot 0,002+0,25\cdot 0,003+0,5\cdot 0,001=0,00175\,.$$

2) Ответ на второй вопрос получим, вычислив апостериорную вероятность гипотезы H_3 по формуле Байеса (2.12):

$$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}{P(A)}=\frac{0,0005}{0,00175}\approx 0,2857\,.$$

Замечание

Задачи 2.62—2.66 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.62. В каждой из двух урн 8 белых и 4 черных шара. Из каждой урны берут по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу берут один. Какова вероятность, что: 1) этот шар белый; 2) из обеих урн были взяты шары разных цветов, если выбранный после этого из них шар оказался белым.

Задача 2.63. Количество испорченных лампочек из 10 штук равновозможное от 0 до 3. Определить вероятность того, что: 1) две, взятые наудачу из 10, лампочки окажутся исправными; 2) среди 10 лампочек было 3 бракованных, если две лампочки, взятые наудачу из 10, оказались исправными.

Задача 2.64. Лотерея содержит 5 выигрышных и 8 невыигрышных билетов. Добавили еще один билет. Все предположения о том, какой это билет, равновозможные. Найти вероятность того, что: 1) два купленных билета оказались выигрышными; 2) до того, как два купленных билета оказались выигрышными, был добавлен выигрышный билет.

Задача 2.65. В кармане имеются три монеты достоинством 1 рубль и четыре монеты достоинством 5 рублей. Одна монета была потеряна. Найти вероятность того, что: 1) взятая из кармана после этого монета достоинством 1 рубль; 2) была потеряна монета 5 рублей, если взятая из кармана после утери монета оказалась достоинством 1 рубль.

Задача 2.66. Произведено два выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Цель поражается с вероятностью 0,5 при одном попадании и с вероятностью 0,9 при двух попаданиях. Найти вероятность, что: 1) цель поражена; 2) было два попадания, если цель оказалась пораженной.

2.6. Сложный эксперимент. Схема Бернулли

Пусть проводится сложный эксперимент, состоящий из n одинаковых независимых испытаний, причем в каждом испытании наблюдают за появлением события A — успеха или появлением противоположного события $\overline{A}$ — неуспеха.

Вероятность успеха во всех опытах одинакова и равна p, т. е. $P(A)=p$. Вероятность неуспеха $P(\overline{A})=q=1-p$. В этом случае говорят, что испытания проводятся по *схеме Бернулли*.

При вычислении вероятностей событий в эксперименте, проходящем по схеме Бернулли, справедливы следующие формулы:

1. Вероятность $P_n(k)$ появления успеха k раз в серии из n испытаний определяется по формуле, называемой *формулой Бернулли*:
$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{2.13}$$
2. Вероятность $P_n(k\geq m)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее m раз, вычисляется по формуле:
$$P_n(k\geq m)=\sum_{k=m}^{n} P_n(k)=\sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{2.14}$$
3. Вероятность появления события A хотя бы один раз при n опытах определяется из соотношения
$$P_n(k\geq 1)=1-q^n. \tag{2.15}$$
4. Количество n опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью не меньшей P_1 можно было утверждать, что событие A произойдет, по крайней мере один раз, находится по формуле
$$n\geq \frac{\ln(1-P_1)}{\ln(1-p)}. \tag{2.16}$$

Задача 2.67. Три монеты одновременно подбрасывают 3 раза. Какова вероятность, что только в одном подбрасывании появятся три герба?

Решение. В этой задаче отдельное испытание Бернулли — это одновременное подбрасывание трех монет. Исход испытания — упорядоченная тройка гербов и решеток.

Пусть событие Γ_i — выпадение герба у i-й монеты при одном бросании $(i=1, 2, 3)$. Успех A — появление трех гербов. Тогда событие A есть произведение трех независимых событий Γ_1, Γ_2 и Γ_3, т. е.

$$A=\Gamma_1\cdot\Gamma_2\cdot\Gamma_3.$$

Поскольку $P(\Gamma_i)=\frac{1}{2}$, а события Γ_i $(i=1, 2, 3)$ — независимы, то, по теореме умножения для независимых событий (2.10), вероятность p — успеха в отдельном испытании будет равна:

$$p=P(A)=P(\Gamma_1)\cdot P(\Gamma_2)\cdot P(\Gamma_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Тогда вероятность неуспеха определится из соотношения

$$q=1-p=\frac{7}{8}.$$

Число испытаний, проведенных по схеме Бернулли, $n=3$ (подбрасывание трех монет производится трижды).

Интересующая нас вероятность — это вероятность появления ровно одного успеха в серии из трех испытаний. По формуле Бернулли (2.13), полагая $k=1$, вычислим требуемую вероятность:

$$P_3(1)=C_3^1\cdot p\cdot q^{3-1}=3\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{147}{512}\approx 0,287.$$

Задача 2.68. Играют два равносильных шахматиста. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три из шести? (Ничейные исходы партий не учитываются.)

Решение. Независимыми испытаниями, проведенными по схеме Бернулли, в этой задаче являются отдельные сыгранные партии. Поскольку шахматисты равносильные, то вероятности выигрыша и проигрыша в каждой партии полагаем равными, т. е.

$$p=\frac{1}{2},\ q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Вероятность выиграть две партии из четырех определяется по формуле Бернулли (2.13), в которой $n=4$ и $k=2$:

$$P_4(2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}.$$

Вероятность выиграть три партии из шести, вычисленная по этой же формуле при $n=6$ и $k=3$, равна:

$$P_6(3)=C_6^3\cdot p^3\cdot q^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}.$$

$P_4(2)>P_6(3)$, поэтому вероятнее выиграть две партии из четырех.

Задача 2.69. Рабочий обслуживает четыре станка. Каждый станок в течение смены (8 часов работы) несколько раз останавливается и всего в сумме стоит 0,5 часа, причем остановки станков в любой момент времени равновероятны.

Определить вероятность того, что в данный момент времени:

1) работают не менее двух станков;

2) работает хотя бы один станок.

Решение. Испытание Бернулли — наблюдение за работой одного станка. Поскольку станков четыре, то $n = 4$. Событие A (успех) состоит в том, что один станок в данный момент времени работает. Вероятность этого события можно определить по формуле геометрической вероятности (2.3):

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega},$$

где мера $A = 8 - 0{,}5 = 7{,}5$ часов (продолжительность безотказной работы станка в течение всей рабочей смены), а мера $\Omega = 8$ часов (продолжительность смены).

Следовательно,

$$P(A) = p = \frac{8 - 0{,}5}{8} = \frac{15}{16},\ P(\overline{A}) = q = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}.$$

1) Вероятность того, что в данный момент времени работают не менее двух станков, по формуле (2.14) равна:

$$P_4(k \geq 2) = \sum_{k=2}^{4} P_n(k) = \sum_{k=2}^{4} C_4^k \left(\frac{15}{16}\right)^k \left(\frac{1}{16}\right)^{4-k} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^2 \left(\frac{1}{16}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{15}{16}\right)^3 +$$

$$+ \left(\frac{15}{16}\right)^4 = \left(\frac{15}{16}\right)^2 \left(6 \cdot \frac{1}{256} + 4 \cdot \frac{15}{256} + \frac{225}{256}\right) = \frac{225}{256} \cdot \frac{291}{256} \approx 0{,}99917.$$

2) Вероятность того, что в данный момент времени работает хотя бы один станок, по формуле (2.15) равна:

$$P_4(k \geq 1) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{1}{16}\right)^4 \approx 1 - 0{,}000015 \approx 0{,}999985.$$

Задача 2.70. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью 0,01 имеет дефект. Каков должен быть объем n случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно дефектное изделие была не менее 0,95?

Решение. Пусть успех — событие A — изделие имеет дефект. По условию вероятность успеха $p = 0{,}01$, тогда вероятность неуспеха $q = 1 - p = 0{,}99$. Требуется найти минимальное количество испытаний n (объем выборки), чтобы с вероятностью, не меньшей $P_1 = 0{,}95$, событие A появилось хотя бы один раз.

Используя формулу (2.16), получим

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0{,}95)}{\ln(1 - 0{,}01)} = \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}99} \approx \frac{-2{,}9957}{-0{,}01005} \approx 298{,}08.$$

Следовательно, минимальный объем выборки $n = 299$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Задачи 2.71—2.77 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.71. Рабочий обслуживает 6 одинаковых станков. Вероятность того, что станок в течение часа потребует регулировки, равна 1/3. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придется регулировать два станка?

Задача 2.72. На отрезок $[0;10]$ ставят случайно четыре точки. Найти вероятность того, что две точки попадут в отрезок $[0;3]$, а две — в отрезок $[3;10]$.

Задача 2.73. В магазин зашли 6 человек и выбирают товары. Найти вероятность того, что трое из них уйдут с покупкой, если вероятность купить выбранный товар для всех одинакова и равна 0,4?

Задача 2.74. Каждый четвертый клиент банка приходит в банк за получением процентов с вклада. В определенный момент в банке ожидают своей очереди обслуживания пять человек. Найти вероятность того, что двое из них пришли получать проценты.

Задача 2.75. Независимо испытываются три прибора. Каждый при испытании выходит из строя с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что при испытании выйдет из строя хотя бы один прибор.

Задача 2.76. В систему массового обслуживания независимо друг от друга обращаются клиенты двух типов: обычные и с приоритетом в обслуживании. Вероятность поступления клиента с приоритетом равна 0,2. Найти вероятность того, что среди пяти обратившихся клиентов не более двух с приоритетом.

Задача 2.77. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один раз выпала шестерка?

2.7. Формула Пуассона. Простейший поток событий

Пусть в эксперименте проводятся повторные испытания по схеме Бернулли и число испытаний n велико $(n \to \infty)$, вероятность p появления наблюдаемого события A в одном испытании мала $(p \to 0)$, а параметр $\lambda = np$ является постоянной величиной. Тогда для вероятности $P_n(k)$ — вероятности того, что событие A в n испытаниях появится k раз, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{2.17}$$

При вычислении вероятности $P_n(k)$ в таком случайном эксперименте можно использовать приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{2.18}$$

которая называется *формулой Пуассона*, а число λ — *параметром Пуассона*.

Задача 2.78. Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0,008. Найти вероятность того, что при контроле среди 500 изделий будет не более двух бракованных.

Решение. Поскольку вероятность $p = 0,008$ мала, а число испытаний $n = 500$ велико, то можно применить формулу Пуассона с параметром $\lambda = np = 500 \cdot 0,008 = 4$. Искомая вероятность является вероятностью суммы трех событий: бракованных изделий оказалось два, одно или ни одного. Поэтому

$$P(A) = P_{500}(2) + P_{500}(1) + P_{500}(0) = \frac{4^2}{2!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^0}{0!}e^{-4} =$$

$$= e^{-4}\left(\frac{4^2}{2!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^0}{0!}\right) = e^{-4}(8+4+1) = 13e^{-4} \approx 0,238.$$

Определение 2.17. *Потоком событий* называется последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Например, потоком событий будут вызовы, поступающие на АТС, потоком событий являются сигналы при сеансе радиосвязи, сообщения, поступающие для обработки на сервер, и т. д.

Определение 2.18. Поток событий называется *пуассоновским* (простейшим), если он обладает следующими свойствами:

1. *Свойством стационарности*, которое состоит в том, что среднее число событий, появляющихся в единицу времени, так называемая *интенсивность потока* λ, есть величина постоянная.
2. *Свойством ординарности*, которое состоит в том, что вероятность появления хотя бы одного события за бесконечно малый промежуток времени приближенно равна вероятности появления за этот промежуток времени одного события, т. е. появление двух или более событий за малый промежуток практически невозможно.
3. *Свойством отсутствия последействия*, при котором вероятность появления k событий за промежуток времени t не зависит от того, сколько событий появилось на любом другом, не пересекающимся с ним участком.

Если обозначить $P_t(k)$ — вероятность появления k событий пуассоновского потока с интенсивностью λ за время t, то справедлива формула:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{2.19}$$

Задача 2.79. Страховая компания обслуживает 10 000 клиентов. Вероятность того, что в течение одного дня клиент обратится в компанию, равна 0,0003. Какова вероятность того, что в течение двух дней в нее обратятся четыре клиента?

Решение. Интенсивность λ потока клиентов в течение одного дня равна

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0,0003 = 3 \text{, а } \lambda t = 3 \cdot 2 = 6 .$$

Следовательно, $P_2(4) = \frac{6^4}{4!} e^{-6} \approx 0,134$.

Задача 2.80. Вероятность сбоя считывающего устройства турникета метрополитена в течение часа мала. Найти эту вероятность, если вероятность того, что за 8 часов будет хотя бы один сбой, равна 0,98, и если известно, что за час через турникет проходит в среднем 1000 человек?

Решение. По формулам (2.15) и (2.19) при $t = 8$ вероятность $P_8(k \geq 1)$ того, что в течение 8 часов будет хотя бы один сбой, равна:

$$P_8(k \geq 1) = 1 - P_8(0) = 1 - \frac{(8\lambda)^0 e^{-8\lambda}}{0!} = 1 - e^{-8\lambda} = 0,98 .$$

Тогда

$$e^{-8\lambda} = 1 - 0,98 = 0,02 \text{, } -8\lambda = \ln 0,02 = -3,912 \text{ и } \lambda = \frac{3,912}{8} = 0,489 .$$

Обозначим искомую вероятность через p и учтем, что $\lambda = np = 1000p$. Поэтому

$$p = \frac{\lambda}{1000} = 0,000489 .$$

Задача 2.81. Среднее число дорожных происшествий за неделю на определенном участке дороги равно семи. Какова вероятность, что за первые два дня на этом участке произойдет менее двух происшествий, а за последующие два дня — не менее двух?

Решение. Обозначим через X число происшествий за два дня и вероятность искомого события A будем искать как вероятность произведения событий:

$$P(A) = P\{X < 2\} \cdot P\{X \geq 2\} = P\{X < 2\} \cdot (1 - P\{X < 2\}) .$$

Поскольку $P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$, то, учитывая, что среднее число дорожных происшествий за день $\lambda = \frac{7}{7} = 1$, а $t = 2$, используем формулу (2.19):

$$P_2(k < 2) = P_2(0) + P_2(1) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = e^{-2}(1+2) = 3e^{-2} \approx 0,406 .$$

Тогда $P(A) = 0,406 \cdot (1 - 0,406) = 0,406 \cdot 0,594 \approx 0,241$.

Замечание

Задачи 2.82—2.85 предлагается решить самостоятельно.

Задача 2.82. Испытывается независимо 50 приборов. Вероятность выхода из строя каждого равна 0,02. Партия принимается, если выйдет из строя не более одного прибора. Найти вероятность, что партия будет принята.

Задача 2.83. Вероятность появления опечатки на странице книги, содержащей 200 страниц, равна 0,01. Найти вероятность того, что в книге не будет опечаток.

Задача 2.84. Среднее число вызовов, поступающих на телефонную линию за 1 секунду, равно 0,05. Вызовы поступают независимо друг от друга. Найти вероятность, что за 1 минуту поступят два вызова.

Задача 2.85. Банк электронного устройства содержит 1000 одинаковых элементов. Вероятность отказа каждого элемента за один час равна 0,001. Найти вероятность, что за два часа откажут не более двух элементов.

2.8. Задания для типовых расчетов

Задание 2.1

1. Из четырех элементов цепи три элемента первого типа соединены параллельно, а четвертый — второго типа — соединен с ними последовательно. События: A_i $(i = 1, 2, 3)$ — i-й элемент первого типа не исправен, B — не исправен элемент второго типа, C — цепь работает. Выразить событие C через события A_i и B.
2. Три стрелка стреляют по мишени. Событие A_i $(i = 1, 2, 3)$ — i-й стрелок попал в цель, событие B — в цель попали два стрелка, событие C — в цель попали все три стрелка. Выразить события B и C через события A_i.
3. Событие A — хотя бы одна из четырех купленных в магазине электрических лампочек бракованная, событие B — бракованных среди них нет, событие C — только одна лампочка бракованная. Что означают события: $A + B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $\overline{A}$, $\overline{C}$?
4. Два шахматиста сыграли три партии, среди которых ничьих не было. Событие A_i — i-ю партию выиграл первый игрок, событие B — все три партии выиграл второй игрок, событие C — второй игрок выиграл две партии. Выразить события B и C через события A_i.
5. Самолет выходит из строя, если поражены оба двигателя или кабина пилота. Событие A_i — поражен i-й двигатель $(i = 1, 2)$, событие B — поражена кабина пилота. Выразить события C и $\overline{C}$ через A_i и B, если событие C состоит в том, что самолет вышел из строя.
6. Бросают игральную кость. События: A — выпало три очка, B — выпало нечетное число очков, C — число выпавших очков не больше пяти. Что означают события: $A + B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A + C$, $\overline{B}$, $\overline{C}$?
7. Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания. Выиграет тот, кто первый попадет. События: A_k — первый попадает на k-м броске, B_j — второй попадет на j-м броске, C — выигрывает второй. Выразить событие C через события A_k и B_j.

8. Посетитель входит в зал музея, где уже есть 4 человека. События: A_k $(k=1,2,3,4)$ — k-й человек из четырех ему знаком, B — среди четырех хотя бы один знакомый. Выразить событие B через события A_k.
9. Из ящика, содержащего бракованные и доброкачественные детали, наудачу и без возвращения извлекают по одной детали до появления бракованной. События: A_k — появление бракованной детали при k-м извлечении, B — произведено пять извлечений. Выразить событие B через события A_k.
10. Прибор состоит из трех элементов первого типа и двух элементов второго типа. События: A_k $(k=1,2,3)$ — исправен k-й элемент первого типа, B_j $(j=1,2)$ — исправен j-й элемент второго типа, C — прибор исправен. Прибор исправен в том случае, когда исправно не менее двух элементов первого типа и хотя бы один элемент второго типа. Выразить событие C через события A_k и B_j.
11. Судно имеет одно рулевое устройство, четыре котла и две турбины. События: A — исправно рулевое устройство, B_k $(k=1,2,3,4)$ — исправен k-й котел, C_j $(j=1,2)$ — исправна j-я турбина, D — судно управляемо. Выразить событие D через события A, B_k и C_j, если известно, что судно управляемо при исправном рулевом устройстве, хотя бы одном исправном котле и хотя бы одной исправной турбине.
12. Из урны, в которой черные и белые шары, взяли два шара. События: A — оба шара белые, B — один шар черный, а другой белый. Что означают события: $A+B$, $A\cdot B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\overline{B}$?
13. Экзаменационный билет содержит три вопроса. События: A — студент знает первый вопрос, B — студент знает второй вопрос, C — студент знает третий вопрос, D — студент сдал экзамен. Студент сдает экзамен, если он знает первый вопрос и хотя бы один из оставшихся двух. Выразить событие D через события A, B и C.
14. Рабочий обслуживает три автоматических станка. События: A — первый станок потребует внимания в течение часа, B — второй станок потребует внимания в течение часа, C — третий станок потребует внимания в течение часа. Что означают события: $A+B+C$, ABC, $\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}$?
15. Рабочий изготовил две детали. Событие A_k $(k=1,2)$ — k-я деталь имеет дефект. Выразить через A_k события: A — ни одна из деталей не имеет дефекта, B — хотя бы одна деталь имеет дефект, C — обе детали дефектны.
16. Студент берет из коробки с шариковыми ручками синего и черного цвета две ручки. События: A — хотя бы одна из них синего цвета, B — обе ручки синего цвета. Что означают события: $A+B$, $A\cdot B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$?

17. Два игрока по очереди бросают монету. Выигрывает тот, у кого у первого выпадет герб. События: A_k — герб выпал у первого игрока при k-м броске, B_j — герб выпал у второго игрока при j-м броске. Выразить через A_k и B_j событие C — выиграет первый.
18. Из таблицы случайных чисел взято наудачу число. События: A — число четное, B — число оканчивается на ноль. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$?
19. Прибор состоит из трех элементов первого типа и двух элементов второго типа. События: A_k $(i=1, 2, 3)$ — исправен k-й элемент первого типа, B_j $(j=1, 2)$ — исправен j-й элемент второго типа, C — прибор исправен. Прибор исправен в том случае, когда исправны все элементы первого типа и хотя бы один элемент второго типа. Выразить событие C через события A_k и B_j.
20. События A — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B — все приборы доброкачественные. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$?
21. В урне черные и белые шары. Взяли два шара. Событие A — хотя бы один из двух шаров черный. Событие B — оба шара черные. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$?
22. Мишень состоит из трех кругов, образованных концентрическими окружностями. Событие A_k $(k=1, 2, 3)$ — попадание в круг радиуса r_k, $r_1 > r_2 > r_3$. Что означают события: $A_1 + A_2 + A_3$, $A_1A_2A_3$, $A_2 + A_3$, A_2A_3?
23. Проводится торпедная атака по цели. Цель поражена, если было не менее двух попаданий. События A_k $(k=1, 2, 3)$ — было попадание при k-м выстреле, B — цель поражена. Выразить событие B через события A_k.
24. Бросают игральную кость. События: A — выпало 2 очка, B — выпало четное число очков. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$?
25. Купили три лотерейных билета. Событие A — хотя бы один из трех билетов выигрышный, B — два билета выигрышные. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$?
26. Бросают две монеты. События: A — появление герба на обеих монетах, B — появление герба только на одной монете, C — появление герба хотя бы на одной монете. Что означают события: $A+B$, $A+C$, $A \cdot C$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $B+C$?
27. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. События: A_k — было попадание при k-м выстреле, B — произведено три выстрела, C — произведено не более трех выстрелов. Выразить события B и C через события A_k.

28. Игральную кость бросают дважды. События: B — сумма выпавших очков четная, C — сумма выпавших очков нечетная, A_k — выпавшее на k-м броске число очков четное $(k=1,2)$. Выразить события B и C через события A_k.

29. Из колоды 36 карт вынимают последовательно три карты. События: A_k $(k=1,2,3)$ — k-я карта красной масти, B — только одна карта красной масти, C — хотя бы одна карта из трех красной масти. Выразить события B и C через события A_k.

30. Бросают три монеты. События: A — на одной монете из трех появился герб, B — хотя бы на одной монете из трех появился герб. Что означают события: $A+B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $B-A$?

Задание 2.2

1. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся: 1) белыми; 2) разного цвета.

2. Таня и Ваня договорились встречать Новый год в компании из 10 человек. Места за столом распределяются путем жребия. Какова вероятность, что их места окажутся рядом?

3. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам, каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажутся три шарика, в другой — один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

4. Совет директоров состоит из трех бухгалтеров, четырех менеджеров и двух аналитиков. Планируется создать группу из трех человек. Найти вероятность, что в нее попадут представители разных профессий.

5. Король Артур и 9 рыцарей садятся за круглый стол в случайном порядке. Определить вероятность того, что: 1) сэр Браун окажется рядом с королем; 2) сэр Браун и сэр Мерлин окажутся рядом с королем.

6. Туристическая группа из четырнадцати человек рассаживается случайным образом в микроавтобус, где есть одно четырехместное сиденье сзади и шесть двухместных. Какова вероятность, что два определенных человека окажутся на одном двуместном сиденьи?

7. В ящике 10 одинаковых шаров, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Случайным образом извлечены шесть шаров. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажутся: 1) шар № 1; 2) шары № 1 и № 2.

8. Из шести карточек с буквами М, А, Ш, И, Н, А выбирают одну за другой четыре и складывают рядом в порядке появления. С какой вероятностью будет получено слово ШИНА? Слово МАША?

9. Восемь билетов в две четырехместные театральные ложи случайным образом распределены среди группы, состоящей из четырех мужчин и четырех женщин.

Найти вероятность того, что в каждой ложе мужчин и женщин окажется поровну.

10. Из колоды 36 карт вынимают две карты. Найти вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.
11. В бухгалтерию поступили 15 накладных, из которых две ошибочные. Для проверки наугад извлекают три. Найти вероятность того, что: 1) все они окажутся с ошибкой; 2) только две будут с ошибкой; 3) хотя бы одна будет ошибочной.
12. Из полного набора костей домино (28 штук) берут семь. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой.
13. Бросают две игральные кости. Найти вероятности: 1) сумма выпавших очков равна 7; 2) сумма выпавших очков — четное число.
14. В отделе фирмы работают 6 мужчин и 4 женщины. Для работы в выходной день наугад отобрано 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
15. В отделении 12 стрелков. Шесть из них стреляют отлично, два хорошо, три удовлетворительно и один плохо. На огневой рубеж вызваны два стрелка. Найти вероятность того, что: 1) оба стреляют отлично; 2) один стреляет хорошо, второй — удовлетворительно.
16. Шесть человек входят в лифт семиэтажного дома. Какова вероятность, что они парами вышли на разных этажах?
17. Абонент забыл последние две цифры телефона и помнит только то, что они различны. Определить вероятность того, что он наудачу набрал нужный номер.
18. При игре в преферанс из 36 карт отбрасываются шестерки и две карты откладываются в прикуп. Какова вероятность, что в прикупе туз и король одной масти?
19. Брошены три игральные кости. Определить вероятность того, что на двух из них выпало одинаковое число очков.
20. В аудитории 20 студентов, из которых 15 девушек и 5 юношей. Преподаватель пригласил к доске двух студентов. Найти вероятность того, что это: 1) оба юноши; 2) один юноша и одна девушка.
21. Собрание сочинений из 5 томов поставлено на полку случайным образом. Найти вероятность, что: 1) все тома стоят подряд; 2) 1-й, 2-й и 3-й тома стоят подряд.
22. Трое пассажиров входят в лифт пятиэтажного дома. Какова вероятность, что двое из них выйдут на одном этаже?
23. Найти вероятность того, что дни рождения трех подруг придутся на разные месяцы года, если попадание их на любой месяц года равновозможное.
24. В кошельке лежат три монеты достоинством 1 рубль и семь монет достоинством 5 рублей. Наудачу берут две монеты. Определить вероятность того, что: 1) обе монеты по 1 рублю; 2) одна достоинством 1 рубль, другая — 5 рублей.

25. В записанном телефонном номере две последние цифры стерлись. Определить вероятность того, что: 1) эти цифры различные; 2) эти цифры одинаковые.
26. Какова вероятность того, что четырехзначный номер автомобиля: 1) четный; 2) делится на пять?
27. Найти вероятность того, что при шести бросаниях игральной кости появятся все грани.
28. Среди 10 лотерейных билетов 3 выигрышных. Наудачу взяли 2 билета. Определить вероятность того, что: 1) оба билета выиграли; 2) один выиграл, а другой нет.
29. Имеется 15 изделий, из которых 5 с браком. Для контроля наудачу берут 2 изделия. Определить вероятность того, что: 1) среди них нет бракованных; 2) одно изделие бракованное, а другое нет.
30. Из колоды, содержащей 52 карты, наугад вынимают четыре карты. Какова вероятность, что все они разных мастей?

Задание 2.3

1. Наудачу взяты два положительных числа, каждое из которых не превышает двух. Определить вероятность того, что их произведение будет не больше единицы, а частное не больше двух.
2. Значения a и b равновозможные в квадрате $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Найти вероятность того, что сумма их квадратов будет больше единицы.
3. На отрезок AB длины 1 см наудачу поставлена точка C. Найти вероятность того, что меньший из отрезков AC и CB имеет длину, большую, чем 1/6 см.
4. Два студента договорились встретиться в институте между 8 и 9 часами. Причем тот, кто придет раньше, ждет другого не более 10 минут. Найти вероятность того, что встреча состоится после 8 часов 30 минут.
5. Какова вероятность, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет действительных корней, если коэффициенты p и q выбираются наудачу из отрезка [0, 1]?
6. На плоскость с нанесенной на нее квадратной сеткой бросается монета диаметра d. Известно, что в 40% случаях монета не пересекает стороны квадрата. Найти размер сетки.
7. Луч локатора перемещается с постоянной угловой скоростью в горизонтальной плоскости. Какова вероятность обнаружить цель в угловом секторе α радиан?
8. Значения p и q равновозможные в квадрате $|p| \le 1$, $|q| \le 1$. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ отрицательны.
9. На плоскости нарисованы две концентрические окружности радиусов 2 см и 4 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадет в кольцо, образованное этими окружностями?

10. В шар вписан куб. Найти вероятность того, что выбранная наудачу внутри шара точка окажется внутри куба.
11. Наудачу выбираются два числа из промежутка $[0;1]$. Найти вероятность того, что их сумма заключена между числами $1/3$ и 1.
12. На отрезке AB длины l наудачу поставлены две точки L и M. Найти вероятность того, что расстояние между ними будет меньше, чем $l/4$.
13. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время их приходов независимо и равновозможное в течение данных суток. Время стоянки первого парохода 1 час, второго — 2 часа. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала.
14. Какова вероятность попасть, не целясь, бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев a, а расстояние между их осями l $(l > a)$?
15. На отрезке $[-1; 2]$ наудачу взяты два числа. Найти вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы.
16. Наудачу взяты два положительных числа, каждое из которых не превышает единицы. Определить вероятность того, что их частное не больше трех.
17. На отрезке длиной 10 см наудачу поставлены две точки. Найти вероятность того, что длина отрезка между ними окажется меньше 5 см.
18. Через точку на диаметре окружности радиуса R проводят перпендикулярные этому диаметру хорды. Определить вероятность того, что длина случайно взятой хорды не более $\frac{\sqrt{3}}{2}R$.
19. Наудачу взяты два положительных числа не больше единицы. Определить вероятность того, что их сумма не меньше 0,5.
20. Даны две концентрические окружности радиусов $r_2 > r_1$ с общим центром. На большей окружности ставятся две точки: A и B. Найти вероятность того, что отрезок AB не пересекает малую окружность?
21. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной 3 см наудачу бросают монету радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата.
22. На отрезок OA длины 21 см наудачу бросается точка B. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем 7 см.
23. Найти вероятность того, что точка, поставленная случайно в круг радиуса R, окажется внутри вписанного в этот круг правильного треугольника.
24. Отрезок длины a разделили случайным образом на три отрезка. Найти вероятность, что эти отрезки могут быть сторонами некоторого треугольника.
25. Какова вероятность, что точка, поставленная случайным образом внутрь квадрата со стороной a, окажется над параболой, проходящей через две вершины квадрата и касающейся противоположной им стороны?

26. На перекрестке установлен светофор, в котором 1 минуту горит зеленый свет и 0,5 минут красный. Затем все повторяется. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность, что он проедет перекресток без остановки?
27. На плоскости проведены параллельные линии, расстояние между которыми попеременно равны 2 и 10 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 3 см не будет пересечен ни одной линией.
28. На отрезке длиной L наудачу выбраны две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше половины L?
29. Наудачу взяты два положительных числа, не превосходящих единицы. Определить вероятность того, что их сумма не превышает единицы, а произведение не меньше 0,09.
30. Найти вероятность того, что три отрезка длиной не более 1 см могут быть сторонами некоторого треугольника.

Задание 2.4

1. Два игрока поочередно извлекают шары из урны, содержащей два белых и четыре черных шара. Выигрывает тот, кто первый вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша начавшего игру.
2. Три охотника стреляют по цели, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания первого охотника в цель при одном выстреле равна 0,8. Для второго и третьего охотников эта вероятность равна 0,7 и 0,6 соответственно. Найти вероятность того, что не более одного выстрела попали в цель.
3. На выходной день метеорологи предсказали дождь с вероятностью 60%, ветер — с вероятностью 45% и одновременно дождливую и ветреную погоду с вероятностью 40%. Какова вероятность ненастной (т. е. дождливой или ветреной) погоды?
4. В продукции завода брак составляет 10%. Для контроля взято 10 изделий. Какова вероятность, что из них хотя бы одно бракованное?
5. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает: 1) только один сигнализатор; 2) хотя бы один сигнализатор.
6. Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет шесть очков. Найти вероятность выигрыша начинающего игру.
7. Три стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности попадания для первого, второго и третьего равны соответственно 0,6, 0,4, 0,8. Какова вероятность, что в мишени только две дырки?
8. В урне n шаров с номерами от 1 до n. Шары извлекают наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность того, что при k первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами их извлечений.

9. Станок работает при условии одновременного функционирования узлов A, B и C, которые работают независимо друг от друга. Вероятность поломки этих узлов равна 0,2, 0,3, 0,1 соответственно. Какова вероятность, что станок выйдет из строя?
10. ЭВМ состоит из трех блоков, неисправность каждого из них вызывает сбой в ее работе. Вероятности возникновения неисправности в течение часа в каждом блоке равны соответственно 0,1, 0,1 и 0,2. Найти вероятность сбоя ЭВМ в течение часа.
11. Число дефектов в изделии может быть любым. По оценке компании вероятность отсутствия дефекта составляет 0,85, а вероятность наличия одного дефекта 0,01. Какова вероятность, что в изделии больше одного дефекта?
12. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало больше четырех очков, при условии, что на второй кости выпало четыре очка.
13. В урне находятся 3 белых и 4 черных шара. Последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что первый вынутый шар — белый, если известно, что хотя бы один из двух вынутых шаров — белый.
14. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Два игрока A и B поочередно вынимают по одному шару. Вынутый шар возвращается обратно в урну, и шары перемешиваются. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Начинает игрок A. Найти вероятность того, что выиграет игрок B до своего четвертого хода.
15. Монету бросают до тех пор, пока два раза подряд не выпадет одна и та же сторона. Найти вероятность, что это произойдет до пятого броска.
16. Опыт состоит в кратковременном включении блока питания. Вероятность отказа в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты независимы и производятся последовательно до наступления отказа. Найти вероятность того, что будет произведено четыре включения.
17. Испытуемому предъявляют два теста. Вероятности решения каждого теста соответственно равны 0,7 и 0,8. Определить вероятность того, что хотя бы один тест будет решен.
18. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,95, для второго — 0,9. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.
19. В ящике 15 деталей, из которых 5 окрашенных. Сборщик наудачу взял три детали. Какова вероятность, что хотя бы одна из них окрашена?
20. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, равна 0,2, вторым — 0,3. Первый сделал два выстрела, второй — один. Определить вероятность того, что цель поражена.
21. Транзисторный приемник смонтирован на 5 полупроводниках, для которых вероятность брака равна 0,05. Найти вероятность того, что радиоприемник будет неработоспособным, если он отказывает при наличии в нем не менее одного бракованного полупроводника.

22. На полке расставлено 10 учебников, из которых 4 в твердом переплете. Взяли 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один будет в твердом переплете?
23. В урне 2 белых и 3 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шары. Выигрывает тот, кто первый вынет белый шар. Определить вероятность выигрыша начинающего игру.
24. Система состоит из двух приборов, дублирующих друг друга. При выходе из строя одного прибора происходит переключение на второй. Надежности (вероятности безотказной работы) каждого прибора равны 0,7 и 0,8 соответственно. Определить надежность системы.
25. Студент выучил 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность, что студент не знает хотя бы один из трех предложенных вопросов.
26. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух независимых выстрелах 0,75. Найти вероятность двух попаданий при двух выстрелах.
27. При повышении напряжения в сети машина A выходит из строя с вероятностью 0,1, а машина B — с вероятностью 0,2. Определить вероятность того, что: а) обе машины выйдут из строя; б) хотя бы одна из машин выйдет из строя, если они выходят из строя независимо друг от друга.
28. В урне 2 белых, 3 черных, 5 красных шаров. Вынимают по очереди три шара. Определить вероятность того, что последние два шара красные.
29. Абонент забыл последнюю цифру нужного ему телефона и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места.
30. Из урны, в которой 3 красных, 4 белых и 5 черных шаров, вынимают последовательно два шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.

Задание 2.5

1. Аналитики выдали прогноз состояния экономики на будущий год: A — спад, B — средний уровень и C — процветание. Вероятности этих состояний: $P(A)=0,3$, $P(B)=0,45$, $P(C)=0,25$. Доход от проекта в состоянии экономики A будет получен с вероятностью 0,03, в состоянии B — с вероятностью 0,35, в состоянии C — с вероятностью 0,78. Найти вероятность того, что: 1) проект принесет доход корпорации; 2) полученный от проекта доход был получен при экономике в состоянии процветания.
2. Фирма, занимающаяся грузоперевозками, выпускает на линию 15 автобусов. Из них: восемь "Икарусов", три "ПАЗ" и четыре "Газели". Вероятности поломки машины каждого из указанных типов равны соответственно 0,1; 0,3 и 0,25. Найти вероятность того, что: 1) автобус на маршруте сломался; 2) сломанный на маршруте автобус оказался марки "Икарус".
3. В группе из девяти стрелков первые пятеро поражают цель с вероятностью 0,6; следующие трое — с вероятностью 0,8, последний из них — с вероятностью 0,9. Найти: 1) вероятность поражения цели наугад вызванным стрелком;

2) вероятность того, что был вызван последний стрелок, если известно, что цель была поражена.

4. Завод получает 45% деталей с завода № 1, 30% — с завода № 2 и 25% — с завода № 3. Вероятность того, что деталь завода № 1 отличного качества равна 0,7; для завода № 2 и завода № 3 эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Сборщик берет наудачу одну деталь. Найти вероятность, что: 1) взятая деталь отличного качества; 2) взятая и оказавшаяся отличного качества деталь была получена с завода № 1.
5. Приборы изготовляются двумя заводами. Первый завод поставляет $2/3$ всех приборов, второй — $1/3$. Надежность приборов первого завода 0,95, а второго — 0,92. Найти: 1) надежность прибора, поступающего в продажу; 2) вероятность того, что купленный исправный прибор изготовлен первым заводом.
6. Предприятие имеет три источника поставки комплектующих — заводы A, B и C. Завод A поставляет 50% общего объема комплектующих, завод B — 40%, завод C — 10%. Статистика показывает, что 10% поставляемых заводом A деталей — брак, а заводы B и C поставляют 5 и 7% бракованных деталей соответственно. Найти вероятности того, что: 1) наугад взятая деталь оказалась бракованной; 2) взятая наугад деталь, оказавшаяся бракованной, была поставлена заводом A.
7. По цели производят три выстрела с вероятностью попадания 0,2 при каждом выстреле. Вероятность уничтожения цели при одном попадании равна 0,3, при двух — 0,6, при трех — 0,9. Найти: 1) вероятность того, что цель уничтожена; 2) вероятность того, что было одно попадание, если известно, что цель поражена.
8. Двигатель работает в нормальном режиме в 80% случаев и в форсированном — в 20% случаев. Вероятность выхода двигателя из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1, а в форсированном — 0,7. Найти вероятность того, что: 1) двигатель за время t вышел из строя; 2) вышедший из строя двигатель работал в нормальном режиме.
9. Компьютерная фирма покупает дисководы CD-ROM двух производителей. Продукция первого производителя содержит в среднем 0,2% брака, а второго — 0,1% брака. Фирма закупила 200 дисководов первого производителя и 350 второго. Найти вероятности того, что: 1) один случайно взятый для проверки из дисковода оказался бракованным; 2) этот, оказавшийся бракованным, дисковод от первого производителя.
10. Лотерея содержит 5 выигрышных и 10 невыигрышных билетов. Два билета купили. Найти вероятность того, что: 1) купленный после этого билет выигрышный; 2) были куплены два невыигрышных билета, если после этого был куплен выигрышный билет.
11. После предварительного контроля деталь проходит одну из трех операций обработки с вероятностями 0,25; 0,35; 0,40 соответственно. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй — 0,04; на третьей — 0,05.

Найти вероятность того, что: 1) после обработки получена деталь без брака; 2) эта, полученная после обработки не бракованная деталь, обрабатывалась первой операцией.

12. В кармане имеются три монеты достоинством 2 рубля и четыре достоинством 1 рубль. Одна монета потерялась. 1) Определить вероятность того, что владелец вынул после этого случайным образом из кармана 1 рубль. 2) После потери монеты владелец случайным образом вынул из кармана 1 рубль. Какова вероятность того, что была потеряна монета 2 рубля?

13. Компания по страховке автомобилей разделяет водителей по трем классам риска: класс A, B и C. Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее, 30% принадлежат к классу A, 60% — к классу B и 10% — к классу C. Вероятность того, что водитель класса A попадет в течение 12 месяцев в аварию, равна 0,01. Для водителя класса B эта вероятность равна 0,05, а для водителя класса C — 0,09. Водитель страхует свою машину в этой компании. Чему равна вероятность того, что: 1) он попадет в аварию; 2) этот попавший в аварию водитель относится к классу C?

14. В группе 20 студентов сдают экзамен. При этом 5 отличников знают все 25 вопросов, 10 хорошо подготовленных знают 20 вопросов, 3 удовлетворительно подготовленных знают 15 вопросов, а 2 плохо подготовленных — 5 вопросов. Найти вероятности событий: 1) вызванный студент ответит на все заданные ему вопросы; 2) вызванный и ответивший на все вопросы студент отличник или хорошист.

15. В течение рабочего дня два сотрудника кредитного банка выполняют 45% и 40% от общего объема работы, а стажер всего 15%. Вероятности совершить ошибку при заключении договора для них равны 0,05; 0,1 и 0,4 соответственно. Найти вероятность того, что: 1) один из договоров пришлось исправлять; 2) ошибку сделал стажер, если известно, что один из договоров пришлось исправлять.

16. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

17. В урну, содержащую четыре шара, опущен белый шар. Все предположения о первоначальном количестве белых шаров равновозможные. Какова вероятность: 1) извлечь из этой урны белый шар; 2) того, что белых шаров половина, если извлеченный из урны случайным образом шар оказался белым?

18. В кармане три монеты достоинством 2 рубля и четыре монеты достоинством 5 рублей. Некто вытащил из кармана одну монету. Найти вероятность, что: 1) после этого владелец возьмет случайно из кармана 2 рубля; 2) у него вытащили 5 рублей, если взятая владельцем из кармана монета оказалась достоинством 2 рубля.

19. Три самолета-штурмовика ведут стрельбу по мишени, ориентируясь на команду "Огонь", подаваемую с командного пункта. Вероятности попадания для них равны 0,2, 0,4 и 0,6 соответственно. Команда "Огонь" подается в два раза чаще

первому самолету, чем второму и третьему, а второму и третьему одинаковое число раз. Найти вероятности того, что: 1) только один выстрел попал в цель; 2) в цель попал первый штурмовик, если известно, что только один выстрел попал в цель.

20. В фирму доставили две партии принтеров по 15 и по 20 штук в каждой. Оказалось, что в первой партии два принтера без картриджей, а во второй — один. Один из принтеров первой партии при перевозке был переложен во вторую. 1) Найти вероятность того, что случайно взятый после этого из второй партии принтер без картриджа. 2) Случайно взятый из второй партии принтер оказался без картриджа. Какова вероятность того, что до этого в нее был переложен принтер с картриджем?

21. Станок одну треть своего времени обрабатывает деталь A, а две трети — деталь B. При обработке детали A он простаивает 10% времени, а при обработке детали B — 15% времени. Какова вероятность того, что: 1) станок оказался простаивающим; 2) простой станка произошел при обработке детали A?

22. Из трех партий взята для испытания одна деталь. Она с равной вероятностью может быть взята из каждой партии. В первой партии 20% бракованных деталей, а в двух других 95% деталей — доброкачественные. Найти вероятность того, что: 1) деталь оказалась бракованной; 2) взятая случайным образом и оказавшаяся бракованной деталь из первой партии.

23. В тире имеется пять ружей, вероятности попаданий из которых равны соответственно 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Стреляющий берет одно ружье наудачу и делает выстрел. 1) Определить вероятность того, что сделанный выстрел попал в цель. 2) Сделанный выстрел попал в цель. Какова вероятность того, что было взято первое ружье?

24. Из урны, содержащей 3 белых и 5 красных шаров, утеряны два шара. Найти вероятность того, что: 1) случайным образом извлеченный после утери из урны шар белый; 2) были утеряны красные шары, если извлеченный после утери из урны шар оказался белым.

25. В первой урне 1 белый и 9 черных шаров, во второй урне 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны убирают по одному шару. Оставшиеся шары ссыпают в третью урну. Определить вероятность того, что: 1) шар, взятый после этого из третьей урны, белый; 2) из первой и второй урны были убраны белые шары, если взятый после этого из третьей урны шар оказался белым.

26. В первой урне 2 белых и 5 черных шаров, во второй — 5 белых и 2 черных. Из первой урны во вторую переложили один шар, затем из второй урны извлекли один шар. Определить вероятность того, что: 1) взятый из второй урны шар — белый; 2) из первой урны во вторую был переложен белый шар, если взятый из второй урны шар оказался белым.

27. В магазин поступили однотипные изделия с трех заводов, причем первый завод поставляет 20% изделий, второй завод — 30%, третий завод — 50%. Среди изделий первого завода 80% первосортных, второго завода — 60% первосортных,

третьего завода 50% первосортных. Определить вероятность, что: 1) купленное в магазине изделие первого сорта; 2) купленное в магазине и оказавшееся первосортным изделие было изготовлено на первом заводе.

28. В двух партиях 12 и 10 изделий, причем в каждой одно изделие бракованное. Одно изделие из первой партии переложили во вторую. 1) Определить вероятность того, что взятое после этого из второй партии изделие бракованное. 2) Взятое из второй партии изделие оказалось бракованным. Чему равна вероятность, что до этого в нее было переложено из первой партии также бракованное изделие?
29. В первой урне 3 белых и 5 черных шаров, во второй — 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую переложили один шар, затем из второй урны извлекли один шар. Определить вероятность того, что: 1) шар, извлеченный из второй урны, черный; 2) во вторую урну из первой был переложен белый шар, если извлеченный после этого из второй урны шар оказался черным.
30. Из 1000 ламп 200 принадлежит первой партии, 300 — второй, 500 — третьей. В первой партии 6% бракованных ламп, во второй — 5%, а в третьей — 4% бракованных ламп. Определить вероятность, что: 1) наудачу выбранная лампа оказалась бракованной; 2) случайно выбранная бракованная лампа из третьей партии.

Задание 2.6

1. В ящике 8 приборов, среди которых 2 с дефектами. Приборы проходят контроль, при котором взятый для проверки прибор возвращается обратно в ящик. Найти вероятность, что при проверке трех приборов только один окажется с дефектом.
2. Три монеты подбрасывают четыре раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадут три герба.
3. Вероятность попадания в "десятку" при одном выстреле 0,3. Сколько необходимо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,95 попасть в "десятку" хотя бы один раз?
4. В библиотеке есть только техническая и математическая литература. Вероятность взять техническую книгу равна 0,8. Библиотеку в течение часа посетило пять человек. Найти вероятность того, что трое из них взяли техническую книгу.
5. Кость бросают шесть раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадает не менее четырех раз.
6. Монету бросают четыре раза. Найти вероятность того, что герб выпадет: 1) менее двух раз; 2) не менее двух раз.
7. Пять лампочек включены в цепь последовательно. Вероятность перегореть для каждой равна 0,1. Найти вероятность разрыва цепи.
8. Две монеты бросают пять раз. Определить вероятность того, что два "герба" появятся не более одного раза.
9. Устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t одинакова и равна 0,2. Найти вероятность

отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказало хотя бы три элемента из пяти.

10. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака 0,2. Передано сообщение из пяти знаков. Найти вероятность того, что только один знак неверен.
11. Две кости одновременно бросают четыре раза. Определить вероятность того, что "двойная шестерка" выпадает только один раз.
12. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что из четырех выстрелов не более двух будут успешными.
13. В партии деталей, изготовленных на некотором предприятии 70% деталей — стандартные, а остальные нестандартные. Найти вероятность обнаружить две нестандартные детали среди пяти случайно выбранных из этой партии.
14. В урне 2 черных и 6 белых шаров. Шар извлекают из урны, а затем возвращают назад. Определить вероятность того, что при пяти извлечениях будет 3 белых и 2 черных шара.
15. В семье шесть детей. Вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы. Определить вероятность того, что в семье точно пять мальчиков.
16. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна 0,7. Определить вероятность того, что из пяти выстрелов два будут успешными.
17. Партия деталей проходит контроль. Известно, что 5% всех деталей не удовлетворяют стандарту. Сколько нужно взять деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?
18. Две монеты бросают пять раз. Определить вероятность того, что два герба появятся только три раза.
19. Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятности отказа каждого из элементов за время T одинаковы и равны 0,2. Найти вероятность отказа прибора за время T, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы три элемента из четырех.
20. Три монеты подбрасывают четыре раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадут три герба.
21. В урне 2 черных и 6 белых шаров. Шар извлекается из урны, а затем возвращается назад. Определить вероятность того, что при пяти извлечениях будет 4 белых шара.
22. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,25. Найти вероятность, что будет не менее трех попаданий при пяти независимых выстрелах.
23. Две игральные кости подбрасывают пять раз. Найти вероятность того, что ровно один раз выпадет одинаковое число очков.
24. Две кости одновременно бросают три раза. Определить вероятность того, что "двойная шестерка" выпадет два раза.

25. Вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы. Какова вероятность того, что среди шести наудачу отобранных новорожденных число мальчиков и девочек одинаково?
26. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничьих нет) не менее трех партий из четырех или не менее шести партий из восьми?
27. Вероятность того, что при пяти независимых вызовах сбой в работе телефонной станции произойдет хотя бы один раз, равна 0,375. Найти вероятность сбоя при одном вызове, если она одинакова при любом вызове.
28. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,2. Определить вероятность того, что при пяти вызовах число сбоев не более двух.
29. Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов остальных и равна 0,2. Испытано пять приборов. Найти вероятность того, что отказало не более одного прибора.
30. Вероятность поражения крейсера торпедой равна 0,4. Произведена атака из четырех торпед. Какова вероятность, что крейсер остался невредим?

Задание 2.7

1. На заводе 1000 станков, каждый из которых может выйти из строя в течение часа с вероятностью 0,001. Найти вероятность, что за 7 часов выйдет из строя не более двух станков.
2. Проводится испытание 10 000 образцов на усталость. Вероятность p поломки за сутки одного образца мала. Найти p, если вероятность того, что за двое суток не сломается ни один образец, равна 0,9.
3. Автоматическая телефонная станция получает в среднем 120 вызовов в минуту. Какова вероятность того, что в ближайшие две секунды она получит не менее двух вызовов?
4. За последние 50 лет наблюдений 8 марта в Петербурге температура ниже 15 °С наблюдалась 2 раза. Найти вероятность того, что в следующие 50 лет температура ниже 15 °С будет хотя бы один раз.
5. Автоматическая телефонная станция получает в среднем 3600 вызовов в час. Какова вероятность того, что в ближайшие две секунды она получит хотя бы один вызов?
6. Проводятся испытания 10 000 образцов на усталость. Вероятность поломки одного образца за сутки мала. Найти эту вероятность, если вероятность того, что в течение трех суток сломается хотя бы один образец, равна 0,05.
7. Среднее число SMS-сообщений, поступивших на телевизионное ток-шоу в течение часа, равно 3600. Какова вероятность, что в ближайшие 5 секунд будет ровно пять SMS-сообщений?
8. Среднее число вызовов, полученное телефонисткой в течение часа, равно 300. Какова вероятность, что в ближайшую минуту будет не более одного вызова?

9. С наколенного катода вылетает в течение минуты 600 электронов. Определить вероятность того, что в течение секунды с катода не вылетит ни одного электрона.
10. Сеанс дальней связи с подводной лодкой длится 3 секунды. Число помех при этом в среднем 1200 в час. Какова вероятность, что за сеанс будет одна помеха?
11. За час через турникет станции метрополитена проходит 1000 человек. Вероятность сбоя считывающего устройства в течение часа равна 0,002. Найти вероятность, что за 2 часа будет не более одного сбоя.
12. В справочную службу приходит в среднем 2 запроса в минуту. Найти вероятность того, что в течение ближайших трех минут придет пять запросов.
13. Сеанс дальней связи с подводной лодкой длится 3 секунды. Число помех при этом в среднем 1200 в час. Найти вероятность того, что за сеанс будет хотя бы одна помеха.
14. Типография издает тираж 10 000 экземпляров за пятидневную неделю. Вероятность брака одного экземпляра за один день мала. Определить ее, если вероятность того, что весь тираж сделан без брака, равна 0,9.
15. Станок-автомат штампует 500 деталей за смену. Вероятность p того, что деталь бракованная мала. Найти среднее число бракованных деталей за рабочую неделю (5 смен), если вероятность того, что среди 500 деталей нет брака, равна 0,02.
16. Поступление информации о результатах торгов на фондовой бирже подчиняется закону Пуассона со средним числом сообщений 1,5 в минуту. Найти вероятность, что за 2 минуты не поступит ни одного сообщения.
17. Устройство состоит из 1000 независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя любого элемента в течение рабочего дня равна 0,0005. Найти вероятность безотказной работы устройства в течение одной пятидневной недели.
18. Приемник состоит из 1000 независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы его в течение года равна 0,0045. Найти вероятность p выхода из строя одного элемента в течение месяца, если эта вероятность одинакова для всех элементов.
19. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение часа равна 0,0002. Найти вероятность того, что в течение 8 часов откажут ровно четыре элемента.
20. Каждый из 500 элементов выходит из строя в течение минуты с вероятностью, равной 0,0002. Какова вероятность, что за час выйдет из строя не более двух элементов?
21. На заводе 1000 станков, каждый из которых выходит из строя в течение часа с вероятностью 0,001. Какова вероятность, что за смену (8 часов) выйдет из строя ровно 10 станков?

22. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 2. Какова вероятность, что за четыре минуты поступит не менее трех вызовов.
23. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит четыре вызова.
24. Вероятность отказа любого из 10 0000 работающих независимо элементов в течение суток равна 0,0001. Какова вероятность того, что за трое суток откажут три элемента?
25. Вероятность отказа любого из 2000 элементов за сутки 0,001. Найти вероятность того, за двое суток не отказал ни один элемент.
26. Сеанс дальней связи с подводной лодкой длится 21 секунду. При этом наблюдаются атмосферные помехи в среднем 1000 в час. Найти вероятность отсутствия помех во время сеанса с подводной лодкой.
27. Проводятся испытания 1000 образцов на усталость. Вероятность поломки каждого образца в течение суток 0,001. Найти вероятность того, что в течение двух суток сломаются менее двух образцов.
28. Среднее число вызовов, полученных телефонисткой в час, равно 120. Какова вероятность, что в ближайшую минуту она не получит вызов?
29. Поступление информации о результатах торгов на фондовой бирже подчиняется закону Пуассона со средним числом сообщений 2 в минуту. Найти вероятность, что за 2 минуты поступит пять сообщений.
30. Вероятность появления опечатки на странице книги, содержащей 100 страниц, равна 0,03. Найти вероятность того, что в книге будет не более двух опечаток.

ГЛАВА 3

Случайные величины

Пусть проведен случайный эксперимент, и $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ — соответствующее ему вероятностное пространство.

Определение 3.1. *Случайной величиной* X называется числовая функция $X = X(\omega)$, заданная на пространстве элементарных событий Ω и отображающая множество Ω во множество вещественных чисел R, если множество $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \Im$, т. е. является событием.

В зависимости от того, каким является множество всех значений случайной величины $X(\Omega)$ — конечным или счетным (дискретным), или несчетным (непрерывным), различают соответственно дискретные или непрерывные случайные величины.

3.1. Закон распределения случайной величины

Говорят, что известен *закон распределения* случайной величины, если известна функциональная зависимость между ее значениями и их вероятностями. Закон распределения случайной величины может быть задан так называемой *функцией распределения*, которая позволяет вычислять вероятности попадания значений случайной величины в промежуток $(-\infty, x)$ для любых вещественных значений x.

Определение 3.2. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется функция вещественной переменной x, которая при всех значениях x равна вероятности события $B = \{\omega : X(\omega) < x\} \subset \Im$, т. е.

$$F(x) = P\{X < x\}, \ \forall x \in R. \tag{3.1}$$

Свойства функции распределения

1. Все значения функции распределения принадлежат промежутку $[0, 1]$, т. е.

$$0 \le F(x) \le 1,$$

поскольку каждое ее значение — это вероятность некоторого события.

2. Функция распределения является неубывающей функцией, т. е.

$$\forall\, x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2),$$

поскольку

$$\underbrace{P\{-\infty < X < x_2\}}_{F(x_2)} = \underbrace{P\{-\infty < X < x_1\}}_{F(x_1)} + P\{x_1 \le X < x_2\}.$$

3. Для функции распределения выполнены условия

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \text{ и } F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$$

т. к. $F(+\infty) = P\{X < +\infty\}$ — вероятность достоверного события, а $F(-\infty) = P\{X < -\infty\}$ — вероятность невозможного события.

4. Из второго свойства следует, что

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1),$$

т. к. $P\{x_1 \le X < x_2\} = \underbrace{P\{-\infty < X < x_2\}}_{F(x_2)} \underbrace{-P\{-\infty < X < x_1\}}_{F(x_1)}$.

5. Функция распределения непрерывна слева, т. е.

$$F(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} F(x),$$

откуда следует, что:

- если x_0 — точка разрыва функции распределения, то

$$P\{X = x_0\} = F(x_0+0) - F(x_0-0);$$

- если x_0 — точка непрерывности функции распределения, то

$$P\{X = x_0\} = 0.$$

3.2. Дискретная случайная величина

Из определения случайной величины следует, что в случае дискретного множества возможных значений $X(\Omega)$ она отображает дискретное вероятностное пространство $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ в дискретное вероятностное пространство

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \\ p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \end{pmatrix},$$

так называемое *вероятностное пространство, порожденное случайной величиной X*.

Следовательно, можно дать другое определение дискретной случайной величины, которое эквивалентно определению 3.1.

Определение 3.3. Дискретной случайной величиной называется переменная, которая принимает не более чем счетное (конечное или счетное) число значений с заданными вероятностями. При этом сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины равна единице.

Закон распределения дискретной случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины чаще всего задают в виде таблицы, содержащей ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Такая таблица называется *рядом распределения* (табл. 3.1).

Таблица 3.1

X	x_1	x_2	...	x_n	...
$P_X = P\{X = x_i\}$	p_1	p_2	...	p_n	...

Для вероятностей p_i должно выполняться условие

$$\sum_i p_i = 1, \tag{3.2}$$

в котором суммирование ведется по всем возможным значениям случайной величины. При бесконечном счетном числе значений случайной величины утверждение (3.1) означает, что числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится и его сумма равна единице.

Если известен ряд распределения дискретной случайной величины X (см. табл. 3.1), то ее функция распределения определяется из соотношений:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \le x_4, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Задача 3.1. Случайная величина X задана рядом распределения в табл. 3.2.

Таблица 3.2

X	0	1	2	3	4	5
P_X	0,1	0,2	0,1	0,15	a	0,25

Найти значение параметра a, функцию распределения и вероятность $P\{1 < X < 3,5\}$.

Решение. 1) Используя формулу (3.2), получим равенство

$$0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}15+a+0{,}25=1,$$

из которого следует, что $a=0{,}2$.

2) Функцию распределения найдем, используя соотношения (3.3):

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}1, & 0<x\le 1,\\ 0{,}1+0{,}2, & 1<x\le 2,\\ 0{,}1+0{,}2+0{,}1, & 2<x\le 3,\\ 0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}15, & 3<x\le 4,\\ 0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}15+0{,}2, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5\end{cases} \quad \text{или} \quad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}1, & 0<x\le 1,\\ 0{,}3, & 1<x\le 2,\\ 0{,}4, & 2<x\le 3,\\ 0{,}55, & 3<x\le 4,\\ 0{,}75, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

График функции распределения показан на рис. 3.1.

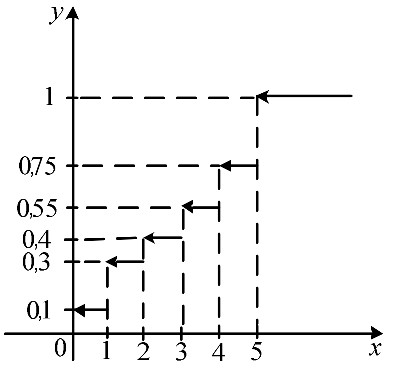

Рис. 3.1

3) Вероятность $P\{1<X<3{,}5\}$ можно вычислить, используя свойство 4 функции распределения:

$$P\{1<X<3{,}5\}=P\{1\le X<3{,}5\}-P\{X=1\}=$$
$$F(3{,}5)-F(1)-P\{X=1\}=0{,}55-0{,}1-0{,}2=0{,}25\,.$$

Однако в данном случае искомую вероятность проще определить из ряда распределения, учитывая, что событие $\{1<X<3{,}5\}$ тождественно сумме событий $\{X=2\}$ и $\{X=3\}$. Поэтому

$$P\{1<X<3{,}5\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=0{,}1+0{,}15=0{,}25\,.$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число $M[X]$, определяемое формулой

$$M[X]=\sum_{i} x_i \cdot p_i, \tag{3.4}$$

в которой x_i — значения случайной величины; p_i — вероятности, с которыми принимаются эти значения.

Свойства математического ожидания

1. Если $C=\text{const}$, то $M[C]=C$.
2. Если $C=\text{const}$, а X — случайная величина и $M[X]$ — ее математическое ожидание, то
$$M[C \cdot X]=C \cdot M[X].$$
3. Для любой случайной величины X справедливо
$$|M[X]| \le M[|X|].$$
4. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ — случайные величины с математическими ожиданиями $M[X_1], M[X_2],..., M[X_n]$, то для математического ожидания случайной величины $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ справедливо равенство
$$M[X]=M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} M[X_i].$$

ЗАМЕЧАНИЕ

В формуле (3.4) математическое ожидание определяется как конечная сумма произведений значений случайной величины на вероятности, с которыми принимаются эти значения в том случае, когда вероятностное пространство эксперимента конечно. Если же эксперимент имеет счетное число исходов, то математическое ожидание — это сумма сходящегося ряда (3.4). Если ряд (3.4) расходится, то математическое ожидание не определено.

Модой дискретной случайной величины называется ее возможное значение x_{mod}, которое принимается случайной величиной с наибольшей вероятностью.

ЗАМЕЧАНИЕ

Случайная величина может иметь более одной моды. В этом случае ее распределение называется *полимодальным* в отличие от *унимодального распределения* — распределения, имеющего единственную моду. Мода случайной величины может быть не определена.

Медианой случайной величины X называется число x_{med}, для которого справедливо соотношение

$$P\{X \le x_{med}\} = P\{X \ge x_{med}\} = \frac{1}{2}.$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от ее математического ожидания. Дисперсия обозначается $D[X]$ или σ_x^2 и определяется соотношением:

$$D[X] = M[X - M[X]]^2. \qquad (3.5)$$

Свойства дисперсии

Для любой случайной величины X, для которой определена дисперсия, справедливо:

1. $D[X] \ge 0$.
2. Если $C = \text{const}$, то $D[C] = 0$.
3. Если $C = \text{const}$, а X — случайная величина и $D[X]$ — ее дисперсия, то
$$D[C \cdot X] = C^2 D[X].$$
4. Для вычисления дисперсии можно использовать более удобную формулу
$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2. \qquad (3.6)$$
5. Если дискретная случайная величина задана рядом распределения (см. табл. 3.1), то ее дисперсия вычисляется по формуле
$$D[X] = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (M[X])^2, \qquad (3.7)$$
если определено математическое ожидание $M[X]$, и случайная величина принимает конечное число значений или значений счетное множество, а числовой ряд $\sum_i x_i^2 \cdot p_i$ сходится. В противном случае говорят, что дисперсия не определена.

Среднеквадратическим отклонением случайной величины (СКВО) называется неотрицательное число σ_X, которое определяется по формуле

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]}. \qquad (3.8)$$

Задача 3.2. Вычислить числовые характеристики случайной величины, заданной рядом распределения в табл. 3.2 (см. задачу 3.1).

Решение. 1) Из формулы (3.4) следует, что

$$M[X] = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}25 = 2{,}9.$$

2) Дисперсию случайной величины вычислим, используя формулу (3.7).

$$D[X]=0\cdot 0,1+1\cdot 0,2+4\cdot 0,1+9\cdot 0,15+16\cdot 0,2+25\cdot 0,25-2,9^2 = =11,4-8,41=2,99,$$

тогда среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_X=\sqrt{D[X]}=\sqrt{2,99}=1,729.$$

3) Модальное значение $x_{mod}=5$, поскольку вероятность $P\{X=5\}=0,25$ — наибольшая.

4) Учитывая, что $P\{X=3\}=0,15$ можно представить как $P\{X=3\}=0,1+0,05$, установим, что

$$P\{X\le 3\}=0,1+0,2+0,1+0,1=0,5 \text{ и } P\{X\ge 3\}=0,05+0,2+0,25=0,5.$$

Тогда по определению $x_{med}=3$.

Задача 3.3. Орудие стреляет по цели, делая три выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, при втором — 0,6, при третьем — 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X — числа попаданий при трех выстрелах. Найти все числовые характеристики случайной величины X, построить ее функцию распределения и вычислить $P\{X<M[X]\}$.

Решение. 1) Случайная величина X может принимать значения: 0, 1, 2 и 3. Вычислим вероятности этих событий, учитывая, что вероятности промаха при каждом из трех сделанных выстрелах равны 0,2; 0,4 и 0,3 соответственно.

- $P\{X=0\}$ — это вероятность того, что все выстрелы дали промах, т. е.

$$P\{X=0\}=0,2\cdot 0,4\cdot 0,3=0,024.$$

- $P\{X=1\}$ — это вероятность того, что только один выстрел из трех попал в цель, а два дали промах. Поэтому

$$P\{X=1\}=0,8\cdot 0,4\cdot 0,3+0,2\cdot 0,6\cdot 0,3+0,2\cdot 0,4\cdot 0,7=0,188.$$

- $P\{X=2\}$ — это вероятность того, что только два выстрела из трех попали в цель, а один дал промах. Поэтому

$$P\{X=2\}=0,8\cdot 0,6\cdot 0,3+0,8\cdot 0,4\cdot 0,7+0,2\cdot 0,6\cdot 0,7=0,452.$$

- $P\{X=3\}$ — это вероятность того, что все три выстрела попали в цель. Следовательно,

$$P\{X=3\}=0,8\cdot 0,6\cdot 0,7=0,336.$$

Ряд распределения случайной величины X запишем в виде табл. 3.3.

Таблица 3.3

X	0	1	2	3	Σ
P_X	0,024	0,188	0,452	0,336	1

2) Найдем числовые характеристики случайной величины X по формулам (3.4), (3.7) и (3.8):

$$M[X] = 0 \cdot 0,024 + 1 \cdot 0,188 + 2 \cdot 0,452 + 3 \cdot 0,336 = 2,1,$$

$$D[X] = 0 \cdot 0,024 + 1 \cdot 0,188 + 2^2 \cdot 0,452 + 3^2 \cdot 0,336 - 2,1^2 = 0,61, \ \sigma_X = \sqrt{0,61} \approx 0,781$$

$$x_{mod} = x_{med} = 2.$$

Функцию распределения найдем, используя соотношения (3.3):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,024, & 0 < x \le 1, \\ 0,212, & 1 < x \le 2, \\ 0,664, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3, \end{cases}$$

а график функции распределения показан на рис. 3.2.

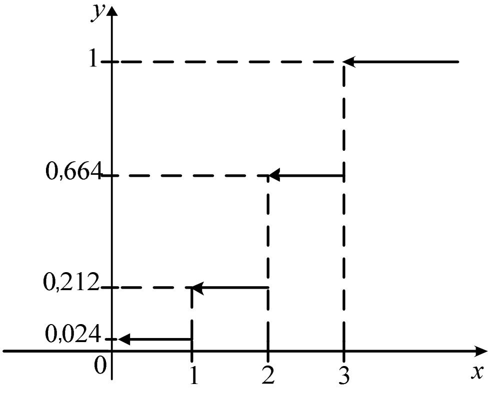

Рис. 3.2

С помощью функции распределения найдем:

$$P\{X < M[X]\} = P\{-\infty < X < 2,1\} = F(2,1) = 0,664.$$

Задача 3.4. Баскетболист забрасывает мяч в корзину до первого попадания, решив заранее не делать более трех бросков. Вероятность попадания при первом броске равна 0,8, при втором — 0,6, при третьем — 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X — числа произведенных бросков. Найти все ее числовые характеристики и вероятность того, что было более одного броска.

Решение. 1) Случайная величина X может принимать значения: 1, 2 и 3. Вычислим вероятности этих событий, учитывая, что вероятности промаха при каждом из трех сделанных бросков равны 0,2, 0,4 и 0,3 соответственно.

- $P\{X=1\}$ — это вероятность того, что было попадание в корзину при первом броске. Поэтому

$$P\{X=1\}=0,8 .$$

- $P\{X=2\}$ — это вероятность того, что первый бросок — промах, а при втором броске мяч попал в корзину. Поэтому

$$P\{X=2\}=0,2\cdot 0,6=0,12 .$$

- $P\{X=3\}$ — это вероятность того, что первые два выстрела — промахи. Следовательно, независимо от того, попал или нет в корзину мяч при третьем броске, вероятность равна

$$P\{X=3\}=0,2\cdot 0,4=0,08 .$$

Ряд распределения случайной величины X показан в табл. 3.4.

Таблица 3.4

X	1	2	3	Σ
$\boldsymbol{P_X}$	0,8	0,12	0,08	1

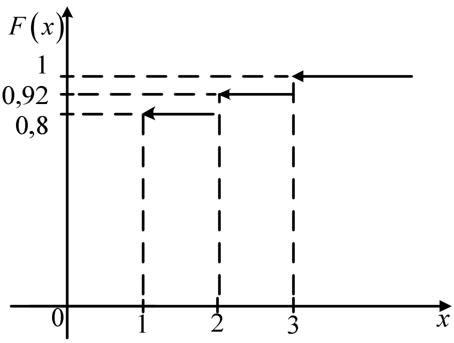

Рис. 3.3

2) Найдем числовые характеристики случайной величины X по формулам (3.4), (3.7) и (3.8):

$$M[X]=1\cdot 0,8+2\cdot 0,12+3\cdot 0,08=1,28 ,$$

$$D[X]=1^2\cdot 0,8+2^2\cdot 0,12+3^2\cdot 0,08-1,28^2=0,3616 ,$$

$$\sigma_X=\sqrt{0,3616}\approx 0,6013 \quad x_{mod}=x_{med}=1 .$$

3) Функцию распределения найдем, используя соотношения (3.3):

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ 0,8, & 1\le x<2, \\ 0,92, & 2\le x<3, \\ 1, & x>3, \end{cases}$$

а график функции распределения показан на рис. 3.3.

4) Из табл. 3.4 ясно, что искомая вероятность

$$P\{X>1\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=0{,}12+0{,}08=0{,}2.$$

Замечание

Задачу 3.5 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.5. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,25. Случайная величина X — количество сделанных выстрелов. Составить ряд распределения случайной величины X, найти все ее числовые характеристики, а также вероятность того, что было не менее двух выстрелов.

Биномиальный закон распределения

Говорят, что случайная величина X распределена по *биномиальному закону*, если ее значения — целые неотрицательные числа 0, 1, …, n, а вероятности, с которыми она принимает эти значения, определяются по формуле Бернулли

$$P(n,k,p)=P_n(k)=P\{X=k\}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \tag{3.9}$$

где k — возможные значения случайной величины; $0<p<1$; $q=1-p$; n, k и p — параметры распределения.

Случайная величина X, например, имеет биномиальное распределение, если она представляет собой количество успехов в серии n независимых испытаний по схеме Бернулли.

Если повторных испытаний n и вероятность успеха p, то ряд распределения биномиальной случайной величины X имеет вид, показанный в табл. 3.5.

Таблица 3.5

X	0	1	2	...	k	...	n
P_X	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Название "биномиальный закон" связано с тем, что вероятности $P_n(k)$ в ряде распределения (см. табл. 3.5) суть члены разложения по формуле бинома Ньютона двучлена $(p+q)^n$, а именно:

$$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины, распределенной по биномиальному закону, определяются соотношениями:

$$M[X]=np,\ D[X]=npq,\ \sigma_X=\sqrt{npq}. \tag{3.10}$$

Задача 3.6. 10% всех деталей в партии, выпущенной предприятием, являются нестандартными. Наудачу для контроля отобраны 4 детали. Найти закон распределения случайной величины X — числа нестандартных деталей среди четырех отобранных, построить функцию распределения, определить все ее числовые характеристики и вычислить вероятность $P\{0,2 < X < 3,3\}$.

Решение. 1) Случайная величина X принимает значения 0, 1, 2, 3, 4 и распределена по биномиальному закону. Вероятности, с которыми принимаются эти значения, вычисляются по формуле Бернулли (3.9).

Поскольку по условию задачи нестандартных деталей 10%, то вероятность выбрать одну нестандартную деталь (вероятность успеха) $p = 0,1$, а вероятность выбрать одну стандартную деталь $q = 1 - p = 0,9$. Поэтому, используя формулу Бернулли, получим:

$$P\{X = 0\} = 0,9^4 = 0,6561;$$

$$P\{X = 1\} = C_4^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^3 = 0,2916;$$

$$P\{X = 2\} = C_4^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486;$$

$$P\{X = 3\} = C_4^3 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9 = 0,0036;$$

$$P\{X = 4\} = 0,1^4 = 0,0001.$$

Ряд распределения случайной величины X представлен в табл. 3.6.

Таблица 3.6

X	0	1	2	3	4	Σ
P_X	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001	1

2) Функция распределения случайной величины X определяется из равенств (3.3):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,6561, & 0 < x \le 1, \\ 0,9477, & 1 < x \le 2, \\ 0,9963, & 2 < x \le 3, \\ 0,9999, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

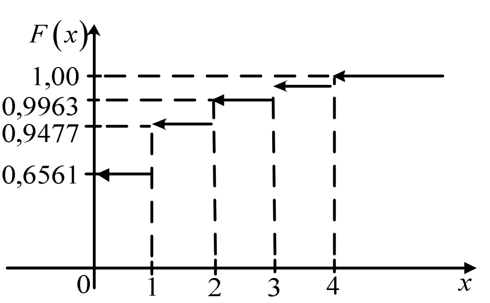

Рис. 3.4

График функции распределения показан на рис. 3.4.

3) Поскольку $n = 4$, $p = 0,1$, $q = 0,9$, то, используя формулы (3.10) для числовых характеристик биномиального закона, получим:

- математическое ожидание $M[X] = np = 4 \cdot 0,1 = 0,4$;
- дисперсия $D[X] = npq = 4 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,36$;
- среднеквадратическое отклонение $\sigma_X = 0,6$;
- $x_{mod} = 0$, т. к. это значение принимается случайной величиной с наибольшей вероятностью $p_1 = 0,6561$;
- $x_{med} = 0$, т. к. представляя $P\{X = 0\} = 0,6561 = 0,5 + 0,1561$ и учитывая, что $p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + 0,1561 = 0,5$ и, следовательно, $P\{X \le 0\} = P\{X \ge 0\} = 0,5$.

4) $P\{0,2 < X < 3,3\} = P\{0,2 \le X < 3,3\} = F(3,3) - F(0,2) = 0,9999 - 0,6561 = 0,3438$

или

$$P\{0,2 < X < 3,3\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} =$$
$$= 0,2916 + 0,0486 + 0,0036 = 0,3438.$$

Задача 3.7. Случайная величина X — число выпадений герба при трех бросаниях монеты. Составить закон распределения случайной величины X, найти все ее числовые характеристики и вычислить вероятность того, что герб выпал более двух раз.

Решение. 1) Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3. Поскольку вероятность выпадения герба и выпадение решетки — равновероятные события (монета считается симметричной), то вероятность успеха $p = 1/2$ и вероятность неуспеха $q = 1/2$ равны. Вероятности, с которыми случайная величина X принимает значения 0, 1, 2, 3, вычисляются по формуле Бернулли (3.9):

$$P\{X = 0\} = q^3 = \frac{1}{8} = 0,125,$$

$$P\{X = 1\} = C_3^1 \cdot p \cdot q^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = 0,375,$$

$$P\{X = 2\} = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0,375,$$

$$P\{X = 3\} = p^3 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Случайная величина X распределена по биномиальному закону, и в табл. 3.7 дан ее ряд распределения.

Таблица 3.7

X	0	1	2	3	Σ
P_X	0,125	0,375	0,375	0,125	1

2) Числовые характеристики:

- математическое ожидание $M[X] = np = 3 \cdot 0,5 = 1,5$;
- дисперсия $D[X] = npq = 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,75$;
- СКВО $\sigma_X = \sqrt{0,75} \approx 0,8667$;
- $x_{mod_1} = 1$, $x_{mod_2} = 2$, $x_{med_1} = 1$, $x_{med_2} = 2$.

3) Искомая вероятность $P\{X > 2\} = P\{X = 3\} = 0,125$.

Замечание

Задачу 3.8 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.8. Составить закон распределения случайной величины X — числа выигранных партий у равносильного противника в серии из пяти матчевых встреч, найти все ее числовые характеристики и вычислить вероятность того, что выигрышных партий будет более трех.

Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина X распределена по *закону Пуассона*, если ее значения — целые неотрицательные числа, а вероятности, с которыми они принимаются, вычисляются по формуле Пуассона

$$P(k,\lambda) = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad (3.11)$$

где $\lambda > 0$ — постоянная величина, которую называют *параметром Пуассона*, $k = 0, 1, 2, ..., n, ...$ — возможные значения случайной величины.

Распределение Пуассона широко применяется в задачах массового обслуживания, а также является предельным случаем биномиального, когда $n \to \infty$, $p \to 0$, а $np \to \lambda$, и справедливо приближенное равенство:

$$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Параметр Пуассона имеет вполне определенный вероятностный смысл: λ — *среднее число появлений наблюдаемого события* в серии независимых испытаний.

Распределенная по закону Пуассона случайная величина принимает бесконечное счетное количество значений. Вид ее ряда распределения представлен в табл. 3.8.

Таблица 3.8

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	...	n	...
$\boldsymbol{P_X}$	$e^{-\lambda}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda}{1!}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$	...	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$	...

Здесь $k = 0, 1, 2, ..., n, ...$ — возможные значения случайной величины, а $\lambda > 0$ — параметр Пуассона.

Очевидно, что

$$P_n(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \geq 0$$

и при этом

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Числовые характеристики случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, определяются соотношениями:

$$M[X] = D[X] = \lambda, \text{ СКВО: } \sigma_X = \sqrt{\lambda}. \tag{3.12}$$

Задача 3.9. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0002. Найти закон распределения случайной величины X — числа неверно сброшюрованных учебников в тираже, ее числовые характеристики, а также вероятность того, что тираж содержит более 5 бракованных книг.

Решение. 1) По условию $n = 10000$ и $p = 0,0002$. Поскольку события, состоящие в том, что книги бракованные, независимы, число n велико, а вероятность p — мала, то будем считать, что случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = n \cdot p = 10000 \cdot 0,0002 = 2$.

Вероятности событий $\{X = k\}$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ в данном распределении будем вычислять по формуле (3.11):

$$P(0,2) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2} \approx 0,1353, \; P(1,2) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 2e^{-2} \approx 0,2707,$$

$$P(2,2) = \frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2} = 2e^{-2} \approx 0,2707, \; P(3,2) = \frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2} = \frac{4}{3}e^{-2} \approx 0,1804,$$

$$P(4,2) = \frac{2^4}{4!}\cdot e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0,0902, \; P(5,2) = \frac{2^5}{5!}e^{-2} = \frac{4}{15}e^{-2} \approx 0,0361.$$

Ряд распределения случайной величины X представлен в табл. 3.9.

Таблица 3.9

X	0	1	2	3	4	5	...
P_X	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	...

2) По формулам (3.12):

$$M[X] = D[X] = \lambda = 2, \; \sigma_X = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1,414, \; x_{mod_1} = 1, \; x_{mod_2} = 2, \; x_{med} = 2.$$

3) Искомая вероятность

$$P\{X>5\}=1-P\{X\le 5\}=1-e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}\right)=$$

$$=1-e^{-2}\frac{109}{15}\approx 0{,}0165.$$

Замечание

Задачу 3.10 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.10. Проверяется партия из 10 000 изделий. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,0001. Найти закон распределения случайной величины X — числа бракованных изделий в партии. Вычислить ее числовые характеристики и определить вероятность того, что партия содержит не менее трех бракованных изделий.

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X распределена по *геометрическому закону*, если ее значения — натуральные числа, а вероятности, с которыми она принимает эти значения, определяются по формуле

$$P_k=P\{X=k\}=p\cdot q^{k-1}, \qquad (3.13)$$

где $k=1, 2, ...$ — возможные значения случайной величины; $0<p<1$; $q=1-p$; p — параметр распределения.

Например, случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она представляет собой число испытаний, проведенных до первого успеха по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании.

Распределенная по геометрическому закону дискретная случайная величина X принимает бесконечное счетное число значений, а вид ряда распределения показан в табл. 3.10.

Таблица 3.10

X	1	2	...	n	...
P_X	p	$p\cdot q$	...	$p\cdot q^{n-1}$	...

При этом $\sum_{n=1}^{\infty}p_i=\sum_{n=1}^{\infty}p\cdot q^{n-1}=p\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=p\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1$.

Числовые характеристики случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, определяются соотношениями:

$$M[X]=\frac{1}{p},\ D[X]=\frac{q}{p^2},\ \text{СКВО: } \sigma_X=\frac{\sqrt{q}}{p},\ x_{mod}=1. \qquad (3.14)$$

Задача 3.11. Игральная кость бросается до первого появления шести очков. Найти закон распределения случайной величины X — числа произведенных бросков, ее числовые характеристики, а также вероятность того, что шесть очков выпадет после третьего броска.

Решение. 1) Случайная величина X — число бросков до первого выпадения шести очков — распределена по геометрическому закону с параметрами $p = 1/6$ и $q = 5/6$. Поэтому

$$P\{X=1\} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6},\ P\{X=2\} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{36},$$

$$P\{X=3\} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216},\ P\{X=4\} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{1\,296} \approx 0{,}0964.$$

Ряд распределения случайной величины X дан в табл. 3.11.

Таблица 3.11

X	1	2	3	4	...
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{1296}$	...

2) Числовые характеристики случайной величины X определим по формуле (3.14):

$$M[X] = \frac{1}{p} = 6,\ D[X] = \frac{q}{p^2} = 30,\ \sigma_X = \frac{\sqrt{q}}{p} = \sqrt{30} \approx 5{,}477.$$

Мода $x_{mod} = 1$, а поскольку для ряда распределения

$$P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213 < 0{,}5,$$

$$P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} + P\{X=4\} \approx 0{,}5177 > 0{,}5,$$

то медиана $x_{med} = 4$.

3) Для вычисления искомой вероятности перейдем к противоположному событию.

$$P\{X>3\} = 1 - P\{X \le 3\} = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}\right) = 1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216} = \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Замечание

Если случайная величина X распределена по геометрическому закону, то вероятность:

$$P\{X>n\} = 1 - P\{X \le n\} = 1 - \left(p + pq + pq^2 + ... + pq^{n-1}\right) =$$

$$= 1 - p\left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}\right) = 1 - \frac{p\left(1-q^n\right)}{1-q} = 1 - 1 + q^n = q^n,$$

а вероятность $P\{X \ge n\} = 1 - P\{X < n\} = q^{n-1}$.

Замечание

Задачи 3.12 и 3.13 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.12. Производится стрельба в мишень до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,25. Найти закон распределения случайной величины X — числа произведенных выстрелов, ее числовые характеристики, а также вероятность того, что попадание будет после четвертого выстрела.

Задача 3.13. Известно, что в ящике с изготовленными на предприятии деталями 5% брака. Найти закон распределения случайной величины X — числа извлеченных из ящика деталей до первого обнаружения бракованной детали. Вычислить ее числовые характеристики, а также вероятность того, что бракованная деталь появится после второго извлечения.

3.3. Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина и ее закон распределения

Определение 3.4. Случайная величина X называется *непрерывной случайной величиной*, если существует такая неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$, называемая *плотностью распределения вероятностей*, что ее функция распределения $F(x)$ определяется из соотношения

$$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \text{ при всех } x \in R. \tag{3.15}$$

Поскольку функция распределения непрерывной случайной величины выражается через плотность распределения $f(x)$ при $x \in R$ по формуле (3.15) с помощью операции интегрирования, то функция распределения $F(x)$ будет непрерывной на всей числовой оси и дифференцируемой на всей числовой оси, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Для функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины выполняются свойства 1—5, приведенные в начале главы.

Замечание 1

Поскольку функция распределения непрерывной случайной величины непрерывна, то по пятому свойству функции распределения справедливо: $P\{X = x_0\} = 0$ при всех $x = x_0$, т. е. каждое свое значение непрерывная случайная величина принимает с вероятностью 0.

Замечание 2

Из пятого свойства функции распределения следует, что для непрерывной случайной величины справедливы соотношения:

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{x_1 \le X \le x_2\}.$$

Свойства плотности распределения

Плотность распределения $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1. Во всех точках непрерывности плотности $f(x)$ на основании теоремы Барроу имеет место равенство
$$f(x) = F'(x).$$
2. $f(x) \geq 0$ при всех $x \in R$, как производная невозрастающей функции $F(x)$.
3. $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = P\{x_1 \leq X < x_2\}$ при любых $x_1, x_2 \in R$. С геометрической точки зрения третье свойство означает, что вероятность $P\{x_1 \leq X < x_2\}$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой плотности распределения $f(x)$ и прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ (рис. 3.5).

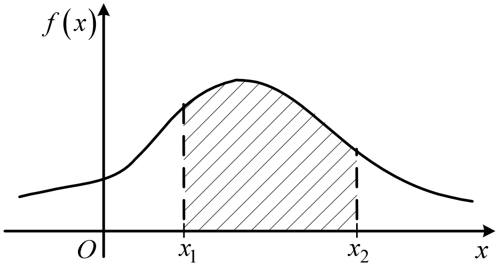

Рис. 3.5

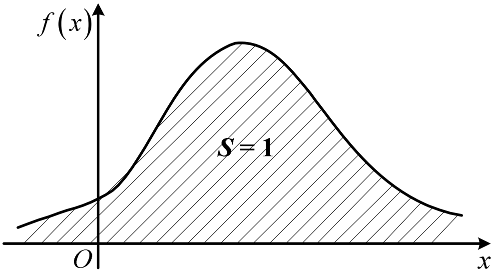

Рис. 3.6

4. Условие *нормированности* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Геометрически условие нормированности означает, что площадь области, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью Ox, равна единице (рис. 3.6).

Задача 3.14. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Ax^2 + B, & x \in (0;\, 2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти значения параметров A и B, функцию распределения случайной величины X, вероятность $P\{0{,}25 < X < 0{,}5\}$.

Решение. 1) Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X непрерывна. Это означает, что в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ выполняются условия непрерывности, т. е.

$$\lim_{x \to 0+0} F(x) = \lim_{x \to 0-0} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to 2-0} F(x) = \lim_{x \to 2+0} F(x) = 1.$$

Поэтому должны выполняться условия

$$\begin{cases} F(0)=0, \\ F(2)=1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} B=0, \\ 4A+B=1. \end{cases}$$

Из полученной системы ясно, что $B=0$ и $A=\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & x\in(0;\,2], \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

2) Плотность распределения случайной величины X можно найти, используя ее первое свойство:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{1}{2}x, & x\in(0;\,2], \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$ показаны на рис. 3.7, *а* и *б* соответственно.

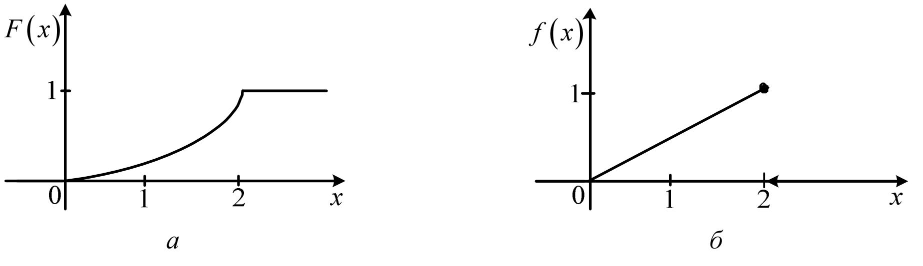

Рис. 3.7

3) Вероятность попадания случайной величины в промежуток $(0{,}25,\ 0{,}5)$ равна:

$$P\{0{,}25<X<0{,}5\}=F(0{,}5)-F(0{,}25)=\tfrac{1}{4}\left(0{,}5^2-0{,}25^2\right)\approx 0{,}0469\,.$$

Задача 3.15. Закон распределения непрерывной случайной величины задан плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,\,-2]\cup[2,\,+\infty), \\ \dfrac{A}{\sqrt{4-x^2}}, & x\in(-2,\,2). \end{cases}$$

Найти параметр A, функцию распределения, построить графики плотности и функции распределения.

Решение. 1) Параметр A можно определить из условия нормированности. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2A\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2A\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = 2A\cdot\frac{\pi}{2} = A\pi\,,$$

то $A=\dfrac{1}{\pi}$, и поэтому плотность распределения будет задана соотношениями:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,\,-2]\cup[2,\,+\infty),\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & x\in(-2,\,2).\end{cases}$$

2) Из соотношения (3.15) определяется функция распределения случайной величины X. При этом в соотношении $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ следует рассматривать три случая $x\le -2$, $-2<x\le 2$ и $x>2$ в соответствии с тем, как задана на этих промежутках плотность $f(x)$:

- ❒ при $x\le -2$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0$;
- ❒ при $-2<x\le 2$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-2} 0dt+\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-2}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt=\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{t}{2}\Big|_{-2}^{x}=\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$;
- ❒ при $x>2$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-2} 0dt+\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-2}^{2}\dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt+\int\limits_{2}^{+\infty} 0dt=\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{t}{2}\Big|_{-2}^{2}=1$.

Следовательно,
$$F(x)=\left[\begin{array}{ll}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{array}\right.$$

Графики плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ показаны на рис. 3.8 и 3.9.

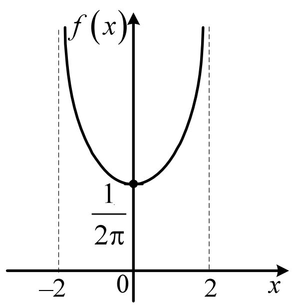

Рис. 3.8

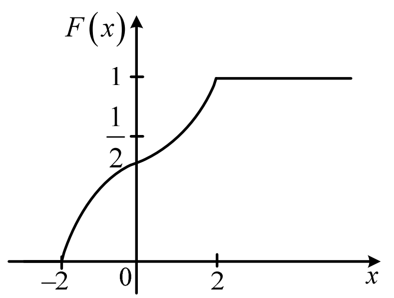

Рис. 3.9

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число $M[X]$, которое определяется из соотношения:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx, \tag{3.16}$$

где $f(x)$ — плотность распределения, а несобственный интеграл предполагается сходящимся абсолютно. В противном случае математическое ожидание не определено.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для определенного формулой (3.16) математического ожидания непрерывной случайной величины справедливы все свойства математического ожидания, которые даны в *разд. 3.2*.

Мода (модальное значение) непрерывной случайной величины X — это значение $x=x_{mod}$, соответствующее наибольшему значению плотности распределения $f(x)$ (рис. 3.10).

ЗАМЕЧАНИЕ

Модальных значений случайной величины может быть более одного. В этом случае распределение называется *полимодальным.*

Медиана x_{med} непрерывной случайной величины X — это число, для которого справедливо соотношение:

$$P\{X\le x_{med}\}=P\{X\ge x_{med}\}=\frac{1}{2}. \tag{3.17}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Медиану непрерывной случайной величины часто можно искать, как корень уравнения

$$F(x)=\frac{1}{2}. \tag{3.18}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Если график плотности распределения имеет ось симметрии $x=a$, то $x_{med}=a$. В частности, если плотность $f(x)$ — четная функция, то $x_{med}=0$ (рис. 3.11).

Дисперсией $D[X]$ непрерывной случайной величины X, у которой определено математическое ожидание $M[X]$, является число, определяемое формулой

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-(M[X])^2, \tag{3.19}$$

где предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно. В противном случае дисперсия не определена. Для дисперсии непрерывной случайной величины, определенной формулой (3.19), выполняются все свойства дисперсии, определенные для дисперсии дискретной случайной величины в *разд. 3.2*.

Среднеквадратическим отклонением непрерывной случайной величины называется неотрицательное число, которое определяется по формуле

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]}. \tag{3.20}$$

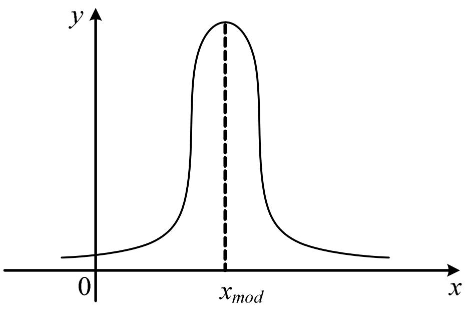

Рис. 3.10

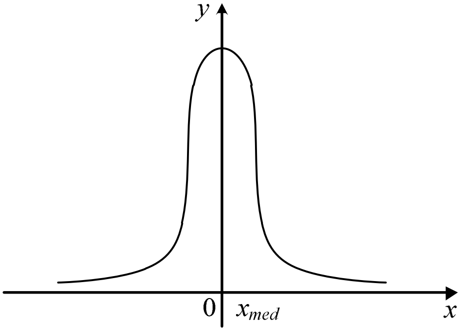

Рис. 3.11

Задача 3.16. Определить числовые характеристики непрерывной случайной величины, закон распределения которой задан плотностью распределения (см. задачу 3.14)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2}x, & x \in (0, 2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Решение. 1) Математическое ожидание случайной величины определяется из соотношения (3.16).

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

2) Из рис. 3.12 — графика плотности $f(x)$, ясно, что $x_{mod} = 2$, поскольку при этом значении плотность распределения наибольшая.

3) Из рис. 3.12 ясно, что $0 < x_{med} < 2$. Функция распределения найдена в задаче 3.14:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2, \text{ при } 0 < x < 2.$$

Используя формулу (3.18), запишем уравнение для определения медианы:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}, \text{ или } x^2 = 2, \text{ или } x = \sqrt{2}.$$

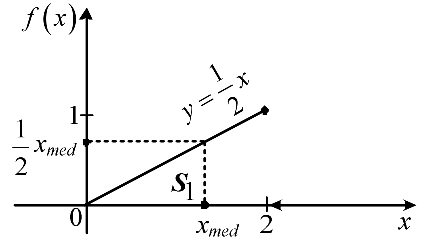

Рис. 3.12

Медиану можно найти геометрически. Поскольку площадь прямоугольного треугольника с катетами x и $f(x) = \frac{1}{2}x$ равна $S_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$ и принимает значение $\frac{1}{2}$ при $x = \sqrt{2}$ (рис. 3.12), то $x_{med} = \sqrt{2}$.

4) Дисперсию случайной величины X определим по формуле (3.19):

$$D[X] = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}xdx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9},$$

а среднеквадратическое отклонение по формуле (3.20) равно:

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}471.$$

Задача 3.17. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ -Ax, & -4 \le x < 0, \\ A\sqrt{x}, & 0 \le x < 4, \\ 0, & x \ge 4. \end{cases}$$

Найти значение параметра A, функцию распределения случайной величины, ее числовые характеристики и вероятность $P\{-1 < X < 5\}$.

Решение. 1) Значение параметра A определим из свойства нормированности плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -A\int_{-4}^{0} xdx + A\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = -A \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + A \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4 = 8A + \frac{16}{3}A = \frac{40}{3}A,$$

то
$$A = \frac{3}{40}.$$

2) Найдем функцию распределения случайной величины X из соотношения (3.15).

- При $x<-4$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

- При $-4\le x<0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-4}0\,dx-\frac{3}{40}\int\limits_{-4}^{x}xdx=-\frac{3}{40}\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{x}=\frac{3}{5}-\frac{3}{80}x^2$.

- При $0\le x<4$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-4}0dx-\frac{3}{40}\int\limits_{-4}^{0}xdx+\frac{3}{40}\int\limits_{0}^{x}\sqrt{x}\,dx=-\frac{3}{40}\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0}+\frac{3}{40}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}\Big|_{0}^{x}=\frac{3}{5}+\frac{1}{20}\sqrt{x^3}.$$

- При $x\ge 4$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-4}0dx-\frac{3}{40}\int\limits_{-4}^{0}xdx+\frac{3}{40}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx+\int\limits_{4}^{x}0dx=-\frac{3}{40}\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0}+\frac{3}{40}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}\Big|_{0}^{4}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1.$$

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-4,\\ \frac{3}{5}-\frac{3}{80}x^2, & -4\le x<0,\\ \frac{3}{5}+\frac{1}{20}\sqrt{x^3}, & 0\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

Графики плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ показаны на рис. 3.13, *а* и *б*.

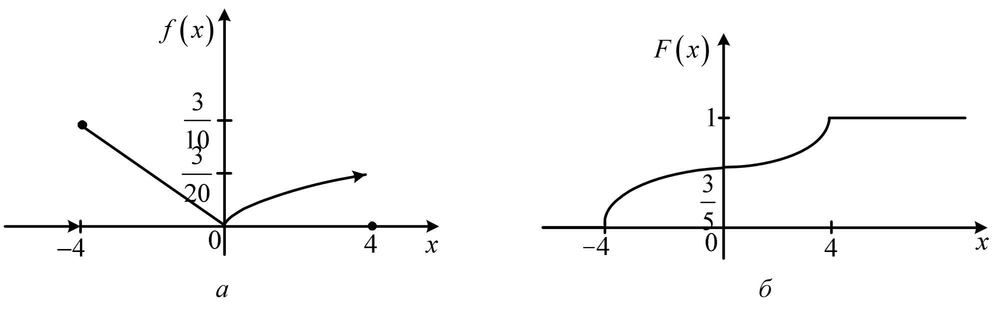

Рис. 3.13

3) Числовые характеристики случайной величины X:

- математическое ожидание, вычисленное по формуле (3.16), равно:

$$M[X]=-\frac{3}{40}\int\limits_{-4}^{0}x^2dx+\frac{3}{40}\int\limits_{0}^{4}x^{\frac{3}{2}}dx=-\frac{3}{40}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{0}+\frac{3}{40}\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\Big|_{0}^{4}=-\frac{8}{5}+\frac{24}{25}=-\frac{16}{25};$$

- модальным значением является число $x_{mod} = -4$, поскольку в этой точке плотность распределения принимает наибольшее значение, равное 0,3 (см. рис. 3.13, *а*);
- медиану вычислим, используя формулу (3.18). Уравнение $\frac{3}{5} + \frac{1}{20} \cdot \sqrt{x^3} = \frac{1}{2}$ не имеет корней при $x \in [0,\ 4)$, поскольку оно равносильно уравнению $\sqrt{x^3} = -2$. Значит, медиана принадлежит промежутку $[-4,\ 0]$ и является отрицательным корнем уравнения $\frac{3}{5} - \frac{3}{80} x^2 = \frac{1}{2}$, т. е. $x_{med} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;
- дисперсию случайной величины X вычислим по формуле (3.19):

$$D[X] = -\frac{3}{40} \int_{-4}^{0} x^3 dx + \frac{3}{40} \int_{0}^{4} x^2 \sqrt{x} dx - \left(-\frac{16}{25} \right)^2 =$$

$$= -\frac{3}{40} \cdot \frac{x^4}{4} \Bigg|_{-4}^{0} + \frac{3}{40} \cdot \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} \Bigg|_{0}^{4} - \left(\frac{16}{25} \right)^2 = \frac{24}{5} + \frac{96}{35} - \frac{256}{625} \approx 7{,}13;$$

- среднеквадратическое отклонение — по формуле (3.20):

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]} = \sqrt{7{,}13} \approx 2{,}67.$$

4) Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(-1; 5)$ найдем, используя свойство 4 функции распределения *(см. разд. 3.1)*:

$$P\{-1 < X < 5\} = F(5) - F(-1) = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{80} = \frac{7}{16} = 0{,}4375.$$

Замечание

Задачи 3.18 и 3.19 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.18. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2; 4], \\ A(x-4), & x \in [2; 4]. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения случайной величины X, вероятность $P\{0 \le X < 2\}$ и все числовые характеристики случайной величины X.

Задача 3.19. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^3 + B, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Найти параметры A и B, плотность распределения $f(x)$, все числовые характеристики случайной величины X и вероятность $P\{0,5 \le X < 1\}$.

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X распределена *равномерно* на промежутке $[a, b]$, если ее плотность определяется соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a;b], \\ 0, & x \notin (a;b], \end{cases} \tag{3.21}$$

в которых числа a, b — параметры распределения.

Замечание

Равномерное распределение имеет, например, случайная величина, представляющая собой время ожидания автобуса на остановке. Равномерное распределение имеет ошибки, возникающие при округлении чисел.

График плотности распределения показан на рис. 3.14, из которого ясно, что все ее свойства выполнены.

Функция распределения равномерно распределенной на промежутке $[a, b]$ случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{3.22}$$

и ее график показан на рис. 3.15.

Числовые характеристики равномерно распределенной на промежутке $[a, b]$ случайной величины X вычисляются по формулам:

$$M[X] = x_{med} = \frac{a+b}{2}, \ D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \ \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{3.23}$$

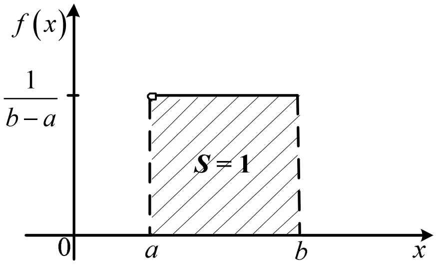

Рис. 3.14

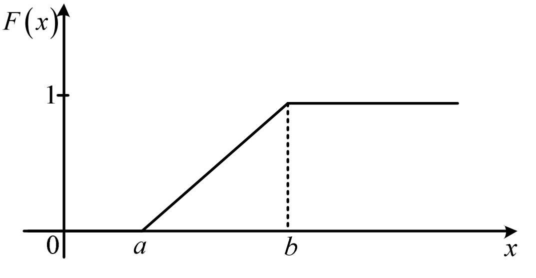

Рис. 3.15

Модой равномерно распределенной случайной величины согласно определению является любое число из промежутка $[a, b]$, хотя ясно, что понятие моды в этом случае лишено смысла.

Задача 3.20. Найти функцию распределения, числовые характеристики и вероятность $P\{1,5 < X < 2,5\}$ случайной величины X, закон распределения которой задан плотностью распределения:

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} A, & x \in (1;\, 3], \\ 0, & x \notin (1;\, 3]. \end{array}\right.$$

Решение. 1) Заданная случайная величина распределена равномерно на промежутке $(1, 3]$. Поэтому из формулы (3.21) следует, что ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}, & x \in (1;\, 3], \\ 0, & x \notin (1;\, 3], \end{array}\right.$$

а график плотности распределения показан на рис. 3.16.

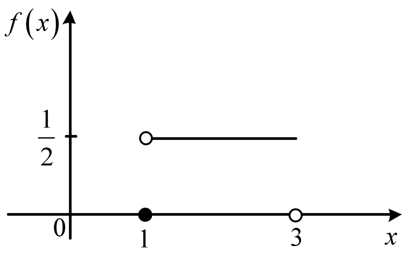

Рис. 3.16

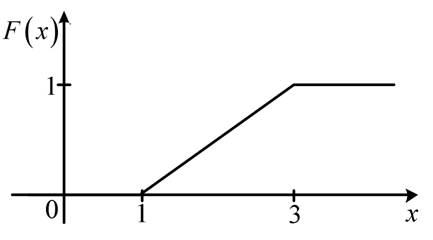

Рис. 3.17

2) Функция распределения этой случайной величины, учитывая (3.22), задается соотношениями

$$F(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3, \end{array}\right.$$

а ее график дан на рис. 3.17.

3) Числовые характеристики найдем из формул (3.23)

$$M[X] = x_{med} = 2,\ D[X] = \frac{1}{3},\ \sigma_X = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4) Вероятность $P\{1,5 < X < 2,5\}$ можно определить, используя третье свойство плотности распределения, т. е.

$$P\{1,5 < X < 2,5\} = \int\limits_{1,5}^{2,5} f(x)dx = S(D),$$

где область D показана на рис. 3.18. Поэтому $S(D) = \frac{1}{2} \cdot (2,5 - 1,5) = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5$.

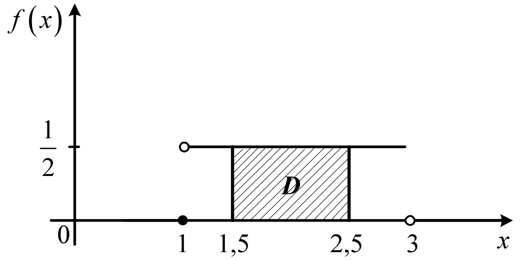

Рис. 3.18

Задача 3.21. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения — 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ждать очередного автобуса менее 4 минут.

Решение. Рассмотрим случайную величину X — время ожидания пассажиром автобуса. По смыслу задачи случайная величина X распределена равномерно на промежутке $[0,10]$ с плотностью

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0,1, & x \in (0;10], \\ 0, & x \notin (0;10]. \end{bmatrix}$$

Поэтому $P\{X < 4\} = P\{-\infty < X < 4\} = \int\limits_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int\limits_{0}^{4} 0,1dx = 0,4$.

Замечание

Задачи 3.22 и 3.23 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.22. Случайная величина X, являющаяся погрешностью приближенных вычислений при округлении до ближайших целых чисел, удовлетворительно описывается равномерным на промежутке $(-0,5; 0,5]$ распределением. Найти все числовые характеристики этой случайной величины, а также вероятность того, что ошибка не превысит 0,1.

Задача 3.23. Трамваи идут регулярно с интервалами 8 минут. Пассажир выходит на остановку в случайный момент времени. Найти все числовые характеристики случайной величины X — времени ожидания пассажиром трамвая, а также вероятность, что пассажир будет ждать трамвая более 5 минут.

Показательное (экспоненциальное) распределение

Случайная величина X распределена по *показательному (экспоненциальному) закону*, если ее плотность определяется соотношениями

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases} \tag{3.24}$$

где λ — постоянная положительная величина — параметр распределения.

График плотности распределения $f(x)$ представлен на рис. 3.19.

Функция распределения случайной величины X, распределенной по показательному закону, определяется равенствами:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \tag{3.25}$$

График функции распределения случайной величины показан на рис. 3.20.

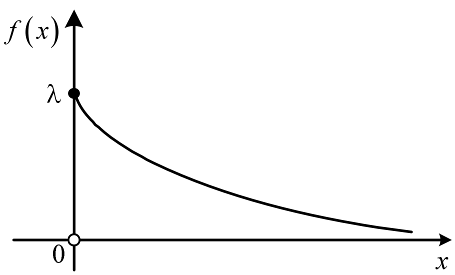

Рис. 3.19

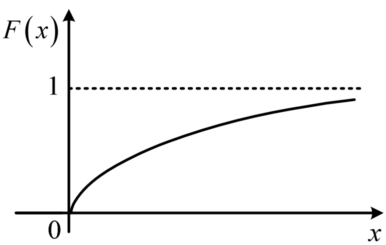

Рис. 3.20

Замечание

По показательному закону будет, например, распределена случайная величина X — длительность времени безотказной работы прибора, если λ — среднее число отказов в единицу времени. Для такой случайной величины функция

$$R(t)=1-F(t)=e^{-\lambda t},$$

называется *функцией надежности* прибора и представляет собой вероятность безотказной работы прибора за время t.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, вычисляются по формулам:

$$M[X]=\frac{1}{\lambda},\ D[X]=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma_X=\frac{1}{\lambda},\ x_{mod}=0,\ x_{med}=\frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{3.26}$$

Задача 3.24. Найти плотность распределения, числовые характеристики и вероятность $P\{0<X<2\}$ случайной величины X, закон распределения которой задан функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-2x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Решение. Из соотношений (3.25) следует, что заданная случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2$. Поэтому ее плотность распределения согласно (3.24) имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2e^{-2x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

а числовые характеристики находятся из формул (3.26):

$$M[X]=\frac{1}{2},\ D[X]=\frac{1}{4},\ \sigma_X=\frac{1}{2},\ x_{mod}=0,\ x_{med}=\frac{\ln 2}{2}.$$

$$P\{0<X<2\}=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 2e^{-2x}dx=2\frac{e^{-2x}}{-2}=-e^{-2x}\Big|_0^2=$$

$$=1-e^{-4}\approx 1-0{,}018316\approx 0{,}982.$$

Задача 3.25. Найти время безотказной работы прибора в течение двух часов, если среднее число отказов прибора за 1 час $\lambda=1$.

Решение. Учитывая замечание данного раздела, вычислим искомую вероятность через функцию надежности

$$P\{t=2\}=R(2)=e^{-2}\cong 0{,}1353.$$

Замечание

Задачи 3.26 и 3.27 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.26. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f(t)=\begin{cases}0{,}5\cdot e^{-0{,}5t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины T, все ее числовые характеристики, а также вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от одного до четырех часов работы.

Задача 3.27. Совещание по рабочим вопросам в управлении длится в среднем около часа. Считая продолжительность совещания распределенной по показательному закону, определить вероятность того, что оно продлится не менее 75 минут.

Распределение Коши

Непрерывная случайная величина X имеет *распределение Коши*, если ее плотность определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}. \tag{3.27}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины X, имеющей распределение Коши, определяется соотношением

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{ar\,ctg} x \,. \tag{3.28}$$

Графики плотности и функции распределения Коши показаны на рис. 3.21, *а* и *б* соответственно.

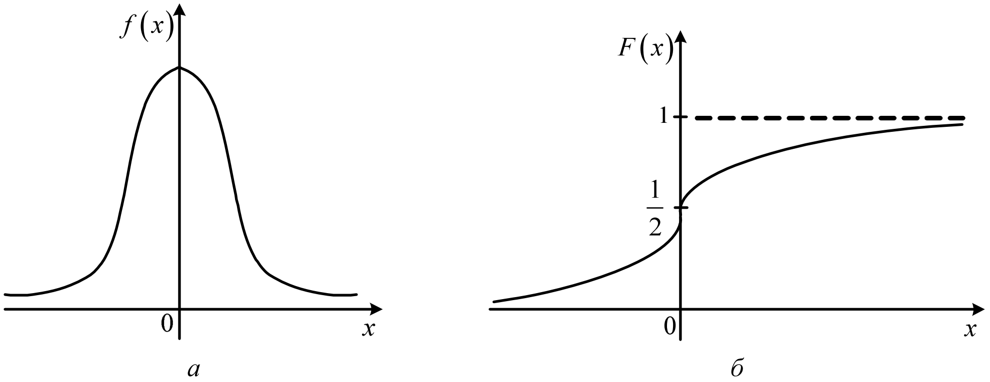

Рис. 3.21

Математическое ожидание и дисперсия этого распределения не определены. Мода и медиана равны нулю.

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение*, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.29}$$

где $-\infty < x < +\infty$; $-\infty < a < +\infty$; $\sigma > 0$; a, σ — параметры распределения. График функции $f(x)$ при $a = 0$ показан на рис. 3.22 и называется *кривой Гаусса*.

Параметры a и σ представляют собой соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X, т. е.

$$M[X] = a\,,\ \sigma_X = \sigma\,,\ D[X] = \sigma^2 .$$

В общем случае кривая Гаусса имеет ось симметрии $x = a$ и поэтому мода и медиана равны a.

Замечание 1

Параметры a и σ нормального распределения иногда называют *средним значением* и *стандартным отклонением* соответственно.

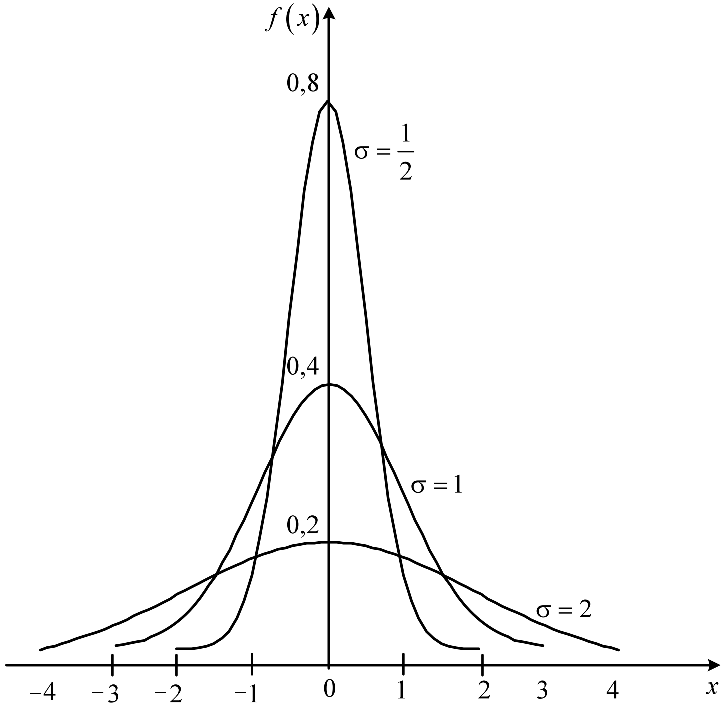

Рис. 3.22

Функция распределения нормальной случайной величины определяется из соотношения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{3.30}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа.

Из соотношения (3.30) следует, что:

1. Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону с параметрами a и σ, в промежуток $(x_1; x_2)$, замкнутый или открытый, вычисляется по формуле

$$P\{x_1 < x < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \tag{3.31}$$

2. Вероятность попадания нормальной случайной величины с параметрами a и σ в промежуток, симметричный относительно параметра a, определяется формулой

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{3.32}$$

3. Вероятность того, что нормальная случайная величина с параметрами a и σ принимает значения меньшие x_2, равна:

$$P\{X < x_2\} = F(x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}. \tag{3.33}$$

4. Вероятность того, что нормальная случайная величина с параметрами a и σ принимает значения большие x_1, равна:

$$P\{X > x_1\} = P\{x_1 < X < +\infty\} = F(+\infty) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \tag{3.34}$$

Замечание 2

Значения функции Лапласа $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \Phi(x)$ можно найти в таблице (см. табл. П.2). При использовании таблицы надо учитывать следующие свойства функции Лапласа:

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0{,}5$, причем уже при $x \geq 5$ можно считать, что практически $\Phi(x) = 0{,}5$.

Замечание 3

Для любой нормально распределенной с параметрами a и σ случайной величины X справедливо:

$$P\{|X - a| < 3\sigma\} = 0{,}9973.$$

Это означает, что лишь в 0,27% наблюдений значение X отклонится от a более чем на 3σ. Такие события можно считать практически невозможными. Поэтому для нормального закона используют так называемое правило "трех сигма": практически достоверно, что нормальная случайная величина отклонится от параметра a не более чем на 3σ.

Задача 3.28. Производятся два независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку 0,5 мм и среднеквадратичное отклонение 6 мм. Какова вероятность того, что из трех измеренных значений два будут отклоняться от истинного значения не более чем на 15 мм?

Решение. Случайная величина X — ошибка измерения — подчинена нормальному закону с параметрами $a = 0{,}5$ и $\sigma = 6$. Вероятность того, что одно измеренное значение будет отклоняться от истинного не более чем на 15 мм, определяется из соотношения (3.32):

$$p = P\{|X - a| \leq 15\} = 2\Phi\left(\frac{15}{6}\right) = 2\Phi(2{,}5) = 2\cdot 0{,}4938 = 0{,}9876.$$

Найденная вероятность $p = 0{,}9876$ — это вероятность успеха в одном испытании в серии из трех независимых испытаниях по схеме Бернулли. Поэтому

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}9753 \cdot 0{,}0124 = 0{,}0363 .$$

Задача 3.29. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 12$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = 3$. Найти интервал, в который с вероятностью $0{,}9973$ попадет X в результате испытания.

Решение. По правилу "трех сигма" искомый интервал имеет вид:

$$(a - 3\sigma; a + 3\sigma) = (3; 21).$$

Задача 3.30. В нормально распределенной совокупности 10% значений X меньше 11 и 30% значений X больше 15,5. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

Решение. В задаче требуется найти параметры нормального распределения: среднее значение (математическое ожидание) — a и стандартное отклонение (среднеквадратическое отклонение) — σ. Из условия задачи ясно, что справедлива система

$$\begin{cases} P(X < 11) = 0{,}1, \\ P(X > 15{,}5) = 0{,}3, \end{cases}$$

которую, учитывая свойство вероятности, можно записать в виде:

$$\begin{cases} P(X < 11) = 0{,}1, \\ P(X < 15{,}5) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(11) = 0{,}1, \\ F(15{,}5) = 0{,}7. \end{cases}$$

Переходя от функции распределения к функции Лапласа по формуле (3.30) и используя таблицу (см. табл. П.2), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{11 - a}{\sigma}\right) = 0{,}1, \\ \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{15{,}5 - a}{\sigma}\right) = 0{,}7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{11 - a}{\sigma}\right) = -0{,}4, \\ \Phi\left(\dfrac{15{,}5 - a}{\sigma}\right) = 0{,}2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11 - a}{\sigma} = -1{,}3, \\ \dfrac{15{,}5 - a}{\sigma} = 0{,}5. \end{cases}$$

Решением последней системы являются параметры нормального распределения $a = 14{,}25$ и $\sigma = 2{,}5$.

Задача 3.31. Каким должно быть среднеквадратическое отклонение σ, чтобы толщина X металлического листа, выпускаемого заводом, отличалась от номинала $a = 2$ мм не более чем на 5% номинала с вероятностью, не меньшей 0,99? Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

Решение. По условию задачи

$$P\{|X - a| < a \cdot 0{,}05\} \geq 0{,}99 .$$

Поскольку $a = 2$, то, учитывая формулу (3.32), можно записать соотношение

$$P\{|X - a| < 0{,}1\} = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sigma}\right),$$

из которого следует, что

$$2\Phi\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) \geq 0,99 \text{, или } \Phi\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) \geq 0,495 \text{.}$$

Функция Лапласа $\Phi(x) = 0,495$ при $x = 2,58$ (см. табл. П.2), а функция распределения случайной величины — функция неубывающая. Значит, справедливо неравенство

$$\frac{0,1}{\sigma} \geq 2,58 \text{,}$$

из которого следует, что $\sigma \leq \frac{0,1}{2,58} \approx 0,039$.

Замечание

Задачи 3.32—3.35 предлагается решить самостоятельно.

Задача 3.32. Производится измерение диаметра вала. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону с $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Задача 3.33. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине менее 0,7 мм. Считая, что непрерывная случайная величина X распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma = 0,4$ мм, найти среднее количество годных шариков среди 100 изготовленных.

Задача 3.34. Цена акции — случайная величина X, которая распределена нормально с математическим ожиданием 90 \$ и среднеквадратическим отклонением 4 \$. Найти вероятность того, что цена акции будет от 85 до 95 \$.

Задача 3.35. Производителю известно, что средний срок работы прибора составляет 1000 часов, а стандартное отклонение срока работы — 120 часов. Считая, что срок работы распределен по нормальному закону, найти вероятность того, что прибор прослужит менее 1100 часов.

3.4. Задания для типовых расчетов

Задание 3.1

1. Орудие стреляет по цели до двух попаданий, но делает не более трех выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8. Выстрелы производятся независимо друг от друга. Дискретная случайная величина X — число сделанных выстрелов. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что было произведено не менее двух выстрелов.

2. Радиостанция через определенные промежутки времени посылает позывные сигналы (не более четырех) до установления двусторонней связи. Вероятность получения ответа на позывной сигнал равна 0,3. Дискретная случайная величина X — число посланных позывных. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что до установления двусторонней связи было послано не более трех позывных.
3. В партии из пяти изделий 2 нестандартных. Случайным образом из партии взято три изделия. Дискретная случайная величина X — число стандартных изделий среди трех отобранных. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность $P\{X \le M[X]\}$.
4. В библиотеке есть только техническая и математическая литература. Вероятность взять техническую книгу равна 0,8. Библиотеку в течение часа посетило пять человек. Дискретная случайная величина X — число читателей, взявших математическую книгу. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что не более трех человек возьмут математическую книгу.
5. Проводятся пять независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,2. Пусть случайная величина X — число появлений события A в пяти опытах. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность $P\{1 \le X \le 3\}$.
6. Два орудия залпом стреляют по цели до первого попадания хотя бы одним орудием. Вероятность попадания каждого орудия в цель при одном выстреле равна 0,1. Найти закон распределения случайной величины X — числа проведенных залпов и все ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график, найти вероятность того, что было не менее двух залпов.
7. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что один из трех станков за время t потребует внимания рабочего, равна 0,3. Найти закон распределения случайной величины X — число станков, требующих внимания рабочего за время t, и все ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график, найти вероятность того, что за время t потребует внимания не менее двух станков.
8. Среднее число дорожных происшествий за неделю на определенном участке дороги равно 7. Найти закон распределения случайной величины X — числа дорожных происшествий за неделю и все ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график. Какова вероятность, что за первый день на этом участке произойдет менее двух происшествий, а за последующие два дня — не менее двух?

9. Проверяется партия из 10 000 изделий. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,0001. Найти закон распределения случайной величины X — числа бракованных изделий и все ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график, найти вероятность, что в партии более двух бракованных изделий.
10. Среднее число грузовиков, прибывающих на склад под разгрузку в течение часа, равно трем. Найти закон распределения случайной величины X — числа прибывающих на склад под разгрузку в течение часа машин и все ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график, найти вероятность, что за час на склад прибудет не более двух машин.
11. В среднем за пять дней рабочей недели на производственной линии происходят 3,6 неполадок. Найти закон распределения случайной величины X — числа неполадок в каждый день работы и все ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график, найти вероятность появления более двух неполадок в каждый день работы.
12. Игральная кость бросается до первого появления шести очков. Найти: 1) закон распределения случайной величины X — числа сделанных бросков; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение; 3) моду и медиану; 4) построить функцию распределения $F(x)$ и ее график; 5) найти вероятность, что потребуется сделать не менее двух бросков.
13. Игрок покупает и тут же проверяет лотерейные билеты до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1. В наличии имеется только пять билетов. Найти: 1) закон распределения случайной величины X — числа купленных билетов; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение; 3) моду и медиану; 4) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 5) вероятность того, что для выигрыша потребуется купить не менее трех билетов.
14. Производится стрельба в мишень до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,25. Найти: 1) закон распределения случайной величины X — числа сделанных выстрелов; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение; 3) моду и медиану; 4) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 5) вероятность, что для попадания потребуется сделать не менее трех выстрелов.
15. Игральную кость бросают пять раз. Дискретная случайная величина X — число выпадений шестерки. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что было сделано не более трех бросков.
16. Пять лампочек включены в цепь последовательно. Вероятность перегореть для каждой равна 0,1. Дискретная случайная величина — число перегоревших лампочек. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию рас-

пределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что перегоревших лампочек не более трех.

17. Две монеты бросают пять раз. Дискретная случайная величина X — число появлений "двойного герба" при пяти бросаниях. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что два герба выпадет не более трех раз.

18. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,2. Передано сообщение из пяти знаков. Дискретная случайная величина X — число искажений в пяти знаках. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что при передаче пяти знаков было не более одного искажения.

19. Игральная кость бросается пять раз. Случайная величина X — число выпадений шестерки. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что шесть очков при пяти бросаниях выпало не более двух раз.

20. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Дискретная случайная величина X — число успешных выстрелов из пяти. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что было более двух и не менее четырех попаданий.

21. В урне 2 черных и 6 белых шаров. Из урны извлекают по одному пять шаров, причем каждый вынутый шар возвращается обратно. Дискретная случайная величина X — число черных шаров из пяти вынутых. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что вынутых черных шаров более трех.

22. Производятся независимые испытания трех приборов на надежность. Вероятность выхода из строя при этих испытаниях для первого прибора равна 0,2, для второго — 0,3, для третьего — 0,4. Дискретная случайная величина X — число приборов, вышедших из строя при испытаниях. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что из строя вышло не более одного прибора.

23. Производится последовательный пуск ракет по цели до первого попадания, или до израсходования боевого комплекта, состоящего из пяти ракет. Вероятность попадания при каждом запуске равна 0,4. Дискретная случайная величина X — число пусков ракет. Найти: 1) ряд распределения случайной величи-

ны X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность $P\{X \le M[X]\}$.

24. Автомобиль встретит 4 светофора, каждый из которых пропустит его с вероятностью 0,5. Дискретная случайная величина X — число светофоров до первой остановки автомобиля. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность $P\{X \le M[X]\}$.

25. Работница прядильной фабрики обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нити в течение одной минуты равна 0,0005. Дискретная случайная величина X — число обрывов нити за 10 минут. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 6) вероятность того, что в течение 10 минут будет более двух обрывов нити.

26. Количество неисправных изделий, обнаруженных при профилактическом осмотре, — случайная величина X, распределенная по закону Пуассона. Была проверена партия из 100 изделий, среди которых оказалось 3% брака. Найти ряд распределения случайной величины X и ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график, найти вероятность того, что при профилактическом осмотре будет более двух бракованных изделий.

27. По статистическим данным вызов пожарной команды в течение одного дня в один из трех районов города происходит с вероятностями 0,1, 0,2 и 0,3 соответственно. Дискретная случайная величина X — количество районов, из которых в течение одного дня поступил вызов. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что в течение трех дней поступит не более одного вызова.

28. Число импульсов помехи за 1 минуту распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием, равным 2. Найти ряд распределения случайной величины X — числа импульсов помехи за 2 минуты и ее числовые характеристики. Построить функцию распределения $F(x)$ и ее график, найти вероятность того, за 2 минуты было более трех импульсов помех.

29. В страховую компанию независимо обращаются клиенты, каждый из которых обслуживается с вероятностью 0,75. Максимальное количество клиентов, которое может обслужить страховая компания за один день, равно шести. Случайная величина X — число клиентов, которых обслуживает страховая компания за один день. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что в течение двух дней компания обслужит двух клиентов.

30. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания, делая не более пяти бросков. Дискретная случайная величина X — число попаданий из пяти сделанных бросков. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание, дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) вероятность того, что было более трех попаданий.

Задание 3.2

1. Плотность распределения непрерывной случайной X величины задана формулой:

$$f(x)=\begin{cases} A\sqrt{1-x}, & x\in[0;1], \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) математическое ожидание; 3) дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 6) вероятность $P\{0<X\le 1\}$.

2. Плотность распределения непрерывной случайной X величины задана формулой:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{x^6}, & x\ge 1, \\ 0, & x<1. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) математическое ожидание; 3) дисперсию и СКВО; 4) моду и медиану; 5) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 6) вероятность $P\{0,5<X\le 2\}$.

3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ A+Bx, & -1\le x<0, \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{-1\le X<2\}$.

4. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ A+Be^{1-x}, & x\ge 1. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{1\le X<2\}$.

5. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана формулой:

$$f(x) = \begin{cases} A\sqrt{x}, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 < X \le 0,25\}$.

6. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ A\ln x + B, & 1 \le x < e, \\ 1, & x \ge e. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 \le X < 1\}$.

7. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} A(1 - 0,5|x|), & x \in [-2;2], \\ 0, & x \notin [-2;2]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 < X \le 2\}$.

8. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2;4], \\ A(x-4), & x \in [2;4]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 < X \le 2\}$.

9. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} A(x+1), & x \in [-1;2], \\ 0, & x \notin [-1;2]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 \le X \le 4\}$.

10. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана формулой:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\cos 2x+B, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\left\{0\le X<\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

11. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}A(x-2), & x\in[-1;\,2],\\ 0, & x\notin[-1;\,2].\end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0<X\le 2\}$.

12. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{x}, & x\in(-\infty;-2),\\ 1, & x\notin(-\infty;-2).\end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{-1\le X\le 0\}$.

13. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty;-1),\\ Ax^{3}+B, & x\in[-1;\,1],\\ 1, & x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0\le X\le 4\}$.

14. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}A, & x\in[-1;\,0],\\ 0, & x\notin[-1;0].\end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{-0{,}5 \le X \le 2\}$.

15. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\operatorname{arctg} x + B, & 0 \le x \le \sqrt{3}, \\ 1, & x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{1 < X < 2\}$.

16. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \sqrt{3}, \\ A\left(1+x^2\right)^{-1}, & |x| < \sqrt{3}. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{-1 \le X \le 1\}$.

17. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} Ax^3 + B, & x \in [-2; 2], \\ 1, & x > 2, \\ 0, & x < -2. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 \le X \le 3\}$.

18. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2, & x \in [0; 2], \\ 0, & x \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{1 \le X \le 5\}$.

19. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A, & x \in [-1; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{-\infty < X < 0,5\}$.

20. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty), \\ \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1; 1). \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{-0,5 \le X \le 0,5\}$.

21. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^x, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{-\infty < X < 2\}$.

22. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ Ax^2 + 0,5x, & x \in [0; 1], \\ 1, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 \le X \le 2\}$.

23. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}], \\ 0, & x \notin [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 \le X \le 1\}$.

24. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{x}, & x \in [1; e], \\ 0, & x \notin [1; e]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\left\{\frac{e}{4} < X < \frac{3}{4}e\right\}$.

25. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\cos x + B, & 0 \le x \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\left\{0 \le X \le \frac{\pi}{4}\right\}$.

26. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\sin x, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\left\{X > \frac{\pi}{2}\right\}$.

27. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ Ax^2 + Bx, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: 1) значения параметров A, B; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{X > 3\}$.

28. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = A \cdot e^{-|x|}.$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{|X| < 1\}$.

29. Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\left(1 - e^{-x}\right), & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) плотность распределения $f(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{0 < X < 1\}$.

30. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Найти: 1) значение параметра A; 2) функцию распределения $F(x)$ и ее график; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию и СКВО; 5) моду и медиану; 6) вероятность $P\{X < M[X]\}$.

Задание 3.3

1. Станок изготовляет детали, отклонение длины которых от нормы подчинено нормальному закону с параметрами $(0; \sigma)$. Деталь считается годной, если отклонение от нормы не превышает по абсолютной величине 1 мм. Найти σ, если вероятность того, что деталь годная, равна 0,9.
2. Изменение цены акции подчинено нормальному закону с параметрами $(20\ \$;\ \sigma)$. Найти σ, если наблюдения в течение года показали, что в 80% случаев изменение цены акций колебалось от 18 до 22 \$.
3. Станок-автомат изготовляет валики. Отклонение диаметра валика от нормы подчинено нормальному закону с параметрами (0; 0,1 мм). Валик считается годным, если отклонение диаметра от нормы не превосходит d мм. Найти d, если вероятность того, что валик годен, равна 0,9.
4. Ошибки измерений подчиняются нормальному закону. Систематическая ошибка равна 0,1 мм, средняя квадратичная ошибка равна 1 мм. Найти вероятность того, что две ошибки попадут в интервал (1; 2).
5. Шлюпка бракуется, если отклонение толщины ее обшивки более чем на d мм по абсолютной величине больше проектной. Случайная величина X — отклонение толщины обшивки шлюпки от проектной — распределена по нормальному закону с параметрами (0; 0,1 мм). Найти d, если вероятность того, что шлюпка небракованная, равна 0,866.
6. Отклонение длины диаметра шарика от проектного подчинено нормальному закону с параметрами $(5; \sigma)$. Найти σ, если вероятность того, что отклонение длины диаметра шарика от проектной длины по абсолютной величине меньше 7, равна 0,34.
7. Производится измерение диаметра вала. Случайная ошибка отклонения диаметра вала от нормы подчинена нормальному закону с параметрами (0; 10 см). Каким должно быть отклонение по абсолютной величине от нормы, если вероятность того, что оно произошло, равна 0,866?

8. Случайная ошибка взвешивания подчинена нормальному закону с параметрами (0; 20 г). Найти вероятность того, что при трех независимых взвешиваниях ошибка хотя бы одного из них не превысит по абсолютной величине 10 г.
9. Деталь считается годной, если отклонение ее размера от нормы по абсолютной величине не больше 10 мм. Отклонение подчинено нормальному закону с параметрами (0; 5 мм). Сколько нужно изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 среди них оказалась хотя бы одна бракованная деталь?
10. Изделие считается изделием высшего сорта, если его вес не превосходит по абсолютной величине 10 г. Ошибка взвешивания подчинена нормальному закону с параметрами (0; 20 г). Найти среднее число изделий высшего сорта среди изготовленных пяти изделий. Взвешивание деталей производится независимо.
11. Деталь удовлетворяет стандарту, если отклонение ее длины от нормы по абсолютной величине не более 0,45 мм. Случайное отклонение длины от нормы подчинено нормальному закону с параметрами (0; 0,3 мм). Определить среднее число стандартных деталей среди изготовленных пяти деталей. Измерения длин деталей независимы.
12. Случайная ошибка измерения подчинена нормальному закону с параметрами (0; 10 г). Найти вероятность того, что при двух независимых измерениях ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 2 г.
13. Случайная величина — погрешность изготовления диаметра втулки — распределена нормально с параметрами (2; 0,01 см). В каких границах можно практически гарантировать диаметр втулки?
14. Каким должно быть среднее квадратическое отклонение σ_X, чтобы параметр детали X отклонялся от номинала $M[X]=a$ по модулю не более, чем на 1% номинала с вероятностью 0,95? Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.
15. Производят два независимых измерения прибором без систематической ошибки. Средняя квадратическая ошибка равна 2. Ошибки измерения распределены нормально. Найти вероятность того, что ошибка хотя бы одного измерения будет по модулю больше двух.
16. Диаметр деталей, которые изготавливает некоторое предприятие, считается допустимым в пределах от 10 до 12 см. Считая, что случайная величина X — диаметр детали — распределена по нормальному закону с параметрами $a=11,2$ см и $\sigma=0,4$ см, выяснить, какой процент деталей будет иметь диаметр, выходящий за пределы допустимого.
17. Ошибка измерения некоторым прибором — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=0$ мм и $\sigma=1$ мм. Производят пять независимых измерений. Найти вероятность, что ошибка хотя бы одного измерения превзойдет по абсолютной величине 2 мм.
18. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднеквадратическое отклонение 50 мг. Номинальный вес порохового заряда равен 2,3 г. Опре-

делить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда — 2,5 г, а случайные ошибки взвешивания распределены по нормальному закону.

19. Средний срок безаварийной езды женщины-водителя составляет 1 год. Безаварийная езда женщины-водителя — случайная величина, распределенная по нормальному закону. По статистическим данным 30% женщин ездят без аварии более полутора лет. Какой процент женщин ездит без аварии менее полугода?

20. Дневная добыча бокситов на руднике распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 600 т и стандартным отклонением 50 т. Найти вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 700 т бокситов.

21. Срок службы компьютера представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения со средним сроком службы 8 лет и средним квадратическим отклонением 1,5 года. Определить вероятность того, что прибор прослужит: 1) до 7 лет; 2) от 9,5 до 11 лет; 3) свыше 12,5 лет.

22. Личный состав курсантов военной академии имеет средний вес 60 кг и среднеквадратическое отклонение от среднего веса 3 кг. Считая, что вес наудачу выбранного курсанта распределен по нормальному закону, найти вероятность того, что: 1) его вес больше 66 кг; 2) его вес отличается от нормы не более чем на 5 кг.

23. Рост мужчин старше 35 лет — случайная величина X, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами: математическое ожидание — 180 см, среднеквадратическое отклонение — 5 см. Определить вероятность того, что рост одного случайным образом выбранного мужчины не превысит 190 см.

24. Весы имеют систематическую ошибку 5 мг и среднеквадратическое отклонение 50 мг. Какова вероятность, что ошибка взвешивания не превзойдет по абсолютной величине 10 мг, если случайные ошибки взвешивания распределены по нормальному закону?

25. Коробки с шоколадными конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,1 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу меньше 1 кг. Масса коробок — случайная величина, распределенная по нормальному закону. Каков процент коробок, масса которых превышает 1,2 кг?

26. Доход фирмы за месяц представляется нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 2 млн руб. Известно, что в 80% случаев доход фирмы превышает 10 млн руб. Найти средний доход фирмы.

27. Длина заготовки распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 1 м и средним квадратическим отклонением 4 см. Найти вероятность того, что в партии из 5 деталей не будет ни одной детали длиной более 105 см.

28. Объем продаж в магазине в течение месяца — случайная величина X, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами $a = 500$ и $\sigma = 80$.

Найти вероятность того, что объем товара хотя бы в одном месяце из трех — апрель, май, июнь — заключен в границах от 480 до 620.

29. Самый распространенный размер мужской обуви — 42-й. Известно, что 80% мужчин носят обувь до 43 размера включительно. Считая, что случайная величина X — размер обуви — подчиняется нормальному закону распределения, найти вероятность того, что из трех мужчин хотя бы один имеет размер обуви более 43-го.

30. Автомат фасует крупу в пакеты по 1 кг. Реальный вес пакета X — случайная величина, распределенная по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10$ г. Найти вероятность того, что два из трех купленных пакетов крупы имеют отклонение от номинального веса не более чем 30 г.

ГЛАВА 4

Случайные векторы

Вектор — столбец $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix}$ или $(X_1, X_2, ..., X_n)^T$, где X_1, X_2, ..., X_n — случайные величины, называется *случайным вектором* или *системой n случайных величин*. Случайные величины X_1, X_2, ..., X_n называются *компонентами* случайного вектора. В зависимости от того, являются случайные величины, образующие случайный вектор, непрерывными или дискретными, различают *непрерывные* и *дискретные* случайные векторы. Из определения следует, что для случайных векторов определены все операции, которые вводились для векторов в курсе линейной алгебры.

4.1. Двумерный случайный вектор и его закон распределения

Вектор — столбец $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ или $(X_1, X_2)^T$, где X_1 и X_2 — случайные величины, называется *двумерным случайным вектором* или *системой двух случайных величин.*

Чаще двумерный случайный вектор обозначается как вектор $(X, Y)^T$. Случайные величины X и Y могут быть независимыми или зависимыми.

Говорят, что задан *закон распределения* двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$, если установлена связь между его возможными значениями (x, y) и их вероятностями. Закон распределения случайного вектора может быть задан его функцией распределения.

4.2. Функция распределения двумерного случайного вектора и ее основные свойства

Функцией распределения двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$ называется функция двух переменных $F(x, y)$, такая, что для каждой точки $(x, y) \in R^2$ ее значение равно вероятности произведения двух событий $X < x$ и $Y < y$, т. е.

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} \quad \forall (x, y) \in R^2. \tag{4.1}$$

С геометрической точки зрения $F(x, y)$ есть вероятность попадания случайной точки в прямой угол с вершиной в точке (x, y), стороны которого параллельны координатным осям (рис. 4.1).

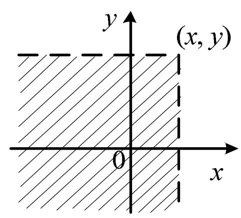

Рис. 4.1

Из определения следует, что для функции распределения справедливы следующие свойства:

1. Все значения функции распределения $F(x, y)$ принадлежат отрезку $[0; 1]$, т. е.

   $$0 \le F(x, y) \le 1, \ \forall (x, y) \in R^2,$$

   поскольку каждое значение $F(x, y)$ — это вероятность некоторого события.

2. Функция распределения $F(x, y)$ не убывает по каждому из своих аргументов при фиксированном другом аргументе, т. е.

   $$F(x_1, y) \le F(x_2, y) \text{ при } x_1 < x_2,$$

   $$F(x, y_1) \le F(x, y_2) \text{ при } y_1 < y_2,$$

   т. к. при увеличении какого-либо из аргументов x или y заштрихованная область на рис. 4.1 увеличивается, и, следовательно, вероятность попадания в нее случайной точки (X, Y) не может уменьшаться.

3. Функция распределения $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому из своих аргументов.

4. Предел функции распределения равен нулю, если хотя бы один из ее аргументов стремится к $-\infty$, т. е.

   $$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0, \ \lim_{\substack{x \to -\infty \\ \forall y \in R}} F(x, y) = 0, \ \lim_{\substack{y \to -\infty \\ \forall x \in R}} F(x, y) = 0,$$

   т. к. события $\{X < -\infty\}$, $\{Y < -\infty\}$ и их произведение — невозможные события.

5. Предел функции распределения равен единице, если $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$, т. е.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1,$$

т. к. произведение $\{X < +\infty\} \cdot \{Y < +\infty\}$ — достоверное событие.

6. Предел функции распределения $F(x, y)$ при $y \to +\infty$ есть функция распределения случайной величины X, а при $x \to +\infty$ этот предел является функцией распределения случайной величины Y, т. е.

$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ \forall x \in R}} F(x, y) = F_X(x), \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ \forall y \in R}} F(x, y) = F_Y(y), \tag{4.2}$$

где $F_X(x)$ — функция распределения случайной величины X, $F_Y(y)$ — функция распределения случайной величины Y.

Определение 4.1. Случайные величины X и Y, являющиеся компонентами случайного вектора $(X, Y)^T$, называются *независимыми*, если события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы для любых вещественных x и y, т. е.

$$P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\} \text{ или } F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y). \tag{4.3}$$

4.3. Двумерный дискретный случайный вектор

Двумерный случайный вектор $(X, Y)^T$ называется дискретным, если множество его возможных значений конечно или бесконечно и счётно.

Определение 4.2. Перечень всех возможных значений $\{x_i; y_j\}$ двумерного дискретного случайного вектора и соответствующих им вероятностей $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ называют его *законом распределения*. При этом всегда справедливо равенство

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1, \tag{4.4}$$

в котором суммирование распространяется на все возможные значения i и j, поскольку события $\{X = x_i, Y = y_j\}$ образуют полную группу.

Закон распределения дискретного двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$ может быть задан формулой

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \; i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., n,$$

или в виде таблицы (табл. 4.1).

Из (4.4) следует, что должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица 4.1

Y \ X	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...		...
x_m	p_{m1}	p_{m1}	...	p_{mn}

Замечание

Закон распределения двумерного случайного вектора часто называют *совместным распределением*, в отличие от законов распределения его компонент, т. е. случайных величин X и Y, которые называют *маргинальными.*

Маргинальные законы распределения компонент двумерного дискретного случайного вектора

Если задан совместный закон распределения случайных величин X и Y, то можно составить их одномерные (маргинальные) законы распределения, вычисляя вероятности $p_i = P\{X = x_i\}$ и $q_j = P\{Y = y_j\}$ по формулам:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{4.5}$$

$$q_j = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}. \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{4.6}$$

Одномерные законы распределения компонент X и Y можно представить в виде табл. 4.2 и 4.3 соответственно.

Таблица 4.2

X	x_1	x_2	...	x_m
p_i	p_1	p_2	...	p_m

Таблица 4.3

Y	y_1	y_2	...	y_n
q_j	q_1	q_2	...	q_n

Задача 4.1. Закон распределения дискретного случайного вектора задан табл. 4.4.

Составить законы распределения его компонент и найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 2\}$.

Таблица 4.4

X \ Y	–1	0	1
0	0,1	0,1	0,1
1	0,1	0	0,2
2	0,3	0	0,1

Решение. 1) Случайная величина X принимает значения 0, 1, 2. Вероятности, с которыми она принимает эти значения, определяются по формуле (4.5) суммированием соответствующих столбцов в табл. 4.4.

$$p_1 = P\{X = 0\} = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3,$$

$$p_2 = P\{X = 1\} = 0,1 + 0 + 0,2 = 0,3,$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = 0,3 + 0 + 0,1 = 0,4.$$

Следовательно, закон распределения случайной величины X можно записать в виде табл. 4.5.

2) Аналогично, по формуле (4.6), суммированием строк табл. 4.4 составляется закон распределения случайной величины Y (табл. 4.6).

Таблица 4.5

X	0	1	2
p_i	0,3	0,3	0,4

Таблица 4.6

Y	–1	0	1
q_j	0,5	0,1	0,4

3) Неравенству $x^2 + y^2 \le 2$ удовлетворяют следующие значения случайной точки: $\{X = 0; Y = -1\}$, $\{X = 0; Y = 0\}$, $\{X = 0; Y = 1\}$, $\{X = 1; Y = -1\}$, $\{X = 1; Y = 0\}$ и $\{X = 1; Y = 1\}$. Следовательно, вероятность, с которой случайная точка (X, Y) попадает в заданный круг, равна сумме вероятностей соответствующих событий, которые определяются из табл. 4.4, т. е.

$$P\{(x, y) \in D\} = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} = 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0 + 0,2 = 0,6.$$

Условные законы распределения компонент двумерного дискретного случайного вектора

Определение 4.3. *Условным законом распределения* какой-либо компоненты случайного вектора называется ее закон распределения, составленный при условии, что другие компоненты приняли определенные значения.

В случае двумерного дискретного случайного вектора $(X,Y)^T$ условным распределением компоненты X при условии, что $Y=y_j$ $(j=\text{const})$, называется совокупность условных вероятностей

$$P(x_1|y_j),\,P(x_2|y_j),\,...,\,P(x_m|y_j),$$

которые вычисляются по формулам:

$$P(x_i|y_j)=P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{q_j}. \tag{4.7}$$

Аналогично, условным распределением компоненты Y при условии, что $X=x_i$ $(i=\text{const})$, называется совокупность условных вероятностей

$$P(y_1|x_i),\,P(y_2|x_i),\,...,\,P(y_n|x_i),$$

которые вычисляются по формулам:

$$P(y_j/x_i)=P\{Y=y_j/X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_i}. \tag{4.8}$$

Случайные величины X и Y, являющиеся компонентами случайного вектора $(X,Y)^T$, *независимы* тогда и только тогда, когда условные законы распределения совпадают с безусловными законами.

Задача 4.2. Для случайного вектора, заданного табл. 4.4, найти все условные законы распределения.

Решение. Случайная величина X принимает значения 0, 1, 2. Вычислим вероятности $P\{X=x_i|Y=y_j\}$ по формулам (4.7):

1) Из табл. 4.6 ясно, что $P\{Y=-1\}=q_1=0,5$. Поэтому:

$$P\{X=0|Y=-1\}=\frac{0,1}{0,5}=\frac{1}{5},\ P\{X=1|Y=-1\}=\frac{0,1}{0,5}=\frac{1}{5},\ P\{X=2|Y=-1\}=\frac{0,3}{0,5}=\frac{3}{5}.$$

2) Поскольку $P\{Y=0\}=q_2=0,1$, то

$$P\{X=0|Y=0\}=\frac{0,1}{0,1}=1,\ P\{X=1|Y=0\}=\frac{0}{0,1}=0,\ P\{X=2|Y=0\}=\frac{0}{0,1}=0.$$

3) Аналогично, $P\{Y=1\}=q_3=0,4$. Значит,

$$P\{X=0|Y=1\}=\frac{0,1}{0,4}=\frac{1}{4},\ P\{X=1|Y=1\}=\frac{0,2}{0,4}=\frac{1}{2},\ P\{X=2|Y=1\}=\frac{0,1}{0,4}=\frac{1}{4}.$$

Результаты внесем в табл. 4.7.

Таблица 4.7

X	0	1	2
$P\{X = x_i \| Y = -1\}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$P\{X = x_i \| Y = 0\}$	1	0	0
$P\{X = x_i \| Y = 1\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Замечание 1

Поскольку условные законы распределения случайной величины X не совпадают с ее безусловным законом распределения (см. табл. 4.5), то можно сделать вывод: случайные величины X и Y являются зависимыми.

Аналогично, по формулам (4.8) вычислим вероятности, с которыми случайная величина Y принимает значения $y_1 = -1, y_2 = 0, y_3 = 1$, при условиях, что $X = 0$, $X = 1$ и $X = 2$ соответственно, и заполним табл. 4.8.

Таблица 4.8

Y	–1	0	1
$P\{Y = y_j \| X = 0\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$P\{Y = y_j \| X = 1\}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$P\{Y = y_j \| X = 2\}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Замечание 2

Вообще говоря, случайные величины X и Y, закон совместного распределения которых задан табл. 4.1, независимы тогда и только тогда, когда справедливо равенство: $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$ или $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ при всех $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Замечание 3

В задаче 4.2 случайные величины X и Y зависимы, поскольку из табл. 4.4 следует, что $p_{11} = 0{,}1$, а из табл. 4.5 и 4.6 — $p_1 = 0{,}3$ и $q_1 = 0{,}5$, т. е. $p_{11} \neq p_1 \cdot q_1$.

Числовые характеристики дискретного двумерного случайного вектора

Математическое ожидание

Математическим ожиданием двумерного дискретного случайного вектора $(X, Y)^T$, закон распределения которого задан табл. 4.1, называется числовой вектор $(M[X], M[Y])^T$ с компонентами, вычисляемыми по формулам:

$$M[X]=\sum_i \sum_j x_i p_{ij}, \quad M[Y]=\sum_i \sum_j y_i p_{ij}, \tag{4.9}$$

в которых суммирование проводится по всем возможным значениям индексов i и j.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если множество возможных значений случайного вектора конечно, то математические ожидания случайных величин X и Y в формулах (4.9) представляют собой конечные суммы. В случае счетного множества возможных значений случайного вектора математические ожидания в этих формулах равны суммам числовых рядов, если эти ряды абсолютно сходятся. В противном случае математическое ожидание случайного вектора не определено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Если для дискретного двумерного случайного вектора получены законы распределения его компонент — случайных величин X и Y, то математическое ожидание этого случайного вектора можно найти по известным формулам для математических ожиданий дискретных случайных величин: $M[X]=\sum\limits_i x_i p_i$, $M[Y]=\sum\limits_j y_j q_j$, где $p_i = P\{X = x_i\}$, $q_j = P\{Y = y_j\}$.

Корреляционный момент

Корреляционным моментом или *ковариацией* случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий, т. е.

$$\operatorname{cov}(X;Y)=K_{XY}=M[(X-M[X])(Y-M[Y])],$$

где $\operatorname{cov}(X;Y)=K_{XY}$ — корреляционный момент или, что то же самое, ковариация; $M[X]$ и $M[Y]$ — математические ожидания случайных величин X и Y.

Для дискретных случайных величин X и Y ковариация вычисляется по формуле

$$\operatorname{cov}(X;Y)=K_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-M[X])(y_j-M[Y])p_{ij}, \tag{4.10}$$

где p_{ij} — вероятность того, что случайный вектор (X, Y) примет значение $(x_i; y_j)$.

Для ковариации справедливы следующие свойства:

1. Из определения следует, что ковариация симметрична, т. е. $K_{XY} = K_{YX}$.
2. Ковариацию можно вычислять по более удобной формуле:
$$K_{XY} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y]. \tag{4.11}$$
3. Дисперсия случайной величины является ковариацией ее с собой, т. е.
$$D[X] = K_{XX},\ D[Y] = K_{YY}.$$
4. Если случайные величины X и Y независимы, то их ковариация равна нулю, т. е. $K_{XY} = 0$.
5. Из формулы (4.11) следует, что математическое ожидание произведения случайных величин X и Y (зависимых или независимых) равно произведению их математических ожиданий плюс их ковариация, т. е.
$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] + K_{XY}. \tag{4.12}$$
6. Дисперсия суммы (разности) случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий плюс (минус) удвоенная ковариация этих случайных величин, т. е.
$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}, \tag{4.13}$$
$$D[X-Y] = D[X] + D[Y] - 2K_{XY}. \tag{4.14}$$
7. Постоянный множитель можно выносить за знак ковариации, т. е.
$$K_{CX,Y} = K_{X,CY} = C \cdot K_{XY}.$$
8. Ковариация не изменится, если к одной из случайных величин или к обеим сразу прибавить постоянную величину, т. е.
$$K_{X+C,Y} = K_{X,Y+C} = K_{X+C,Y+C} = K_{XY}.$$
9. Для ковариации двух случайных величин X и Y справедливо неравенство
$$|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y, \tag{4.15}$$
где σ_X и σ_Y — СКВО случайных величин X и Y соответственно.

Замечание 1

Если $K_{XY} = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными.* Заметим, что независимые случайные величины являются некоррелированными, а некоррелированные случайные величины могут быть зависимыми.

Замечание 2

Если случайные величины X и Y независимы, то из (4.12) следует, что $M[XY] = M[X] \cdot M[Y]$. Из того, что $M[XY] = M[X] \cdot M[Y]$, нельзя делать вывод о независимости X и Y. Если же $M[XY] \ne M[X] \cdot M[Y]$, то случайные величины X и Y зависимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Если случайные величины X и Y независимы, то из (4.13) и (4.14) следует, что $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$.

Матрица ковариаций

Матрицей ковариаций Σ случайных величин X и Y называется симметричная квадратная матрица второго порядка, на главной диагонали которой расположены дисперсии случайных величин X и Y, а на побочной диагонали — корреляционные моменты, т. е.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{pmatrix}.$$

Из девятого свойства ковариации $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$ следует, что $K_{XY}^2 \le \sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2$, и, следовательно, определитель матрицы ковариаций неотрицателен, т. е.

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{vmatrix} = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - K_{XY}^2 \ge 0 .$$

Обобщенная дисперсия

Определитель матрицы ковариаций называется *обобщенной дисперсией* случайных величин X и Y и обозначается $|\Sigma|$, т. е.

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{vmatrix} = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - K_{XY}^2 . \qquad (4.16)$$

Коэффициент корреляции

Коэффициентом корреляции r_{XY} случайных величин X и Y называется отношение их ковариации к произведению среднеквадратических отклонений этих случайных величин, т. е.

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} , \qquad (4.17)$$

где $\sigma_X = \sqrt{D[X]}$, $\sigma_Y = \sqrt{D[Y]}$.

Для коэффициента корреляции справедливы следующие свойства:

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицу, т. е.

   $$-1 \le r_{XY} \le 1 ,$$

   что следует из (4.15).

2. Если случайные величины X и Y независимы, то их ковариация равна нулю, а значит, и коэффициент корреляции равен нулю, т. е.

   $$r_{XY} = 0 .$$

3. Если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью, т. е. $Y = aX + b$, $a \neq 0$, то

$$r_{XY} = \begin{bmatrix} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0, \end{bmatrix}$$

т. к. в данном случае $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$, $\sigma_Y = |a|\sigma_X$, $K_{XY} = aK_{XX} = a \cdot \sigma_X^2$. Поэтому

$$r_{XY} = \frac{a\sigma_X^2}{|a|\sigma_X\sigma_X} = \frac{a}{|a|} = \pm 1 .$$

4. Верно и обратное утверждение. Если $|r_{XY}| = 1$, то случайные величины X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Определение 4.4. Две случайные величины X и Y называются *коррелированными*, если их ковариация K_{XY} или коэффициент корреляции r_{XY} отличны от нуля, и *некоррелированными*, если они равны нулю.

Замечание

Как уже отмечалось, из независимости случайных величин следует их некоррелируемость. Из некоррелируемости случайных величин их независимость еще не следует. В этом случае можно лишь утверждать, что эти случайные величины не связаны линейной зависимостью.

Задача 4.3. Для случайного вектора, заданного табл. 4.4, найти все числовые характеристики.

Решение. Маргинальные законы компонент случайного вектора, т. е. случайных величин X и Y, получены в задаче 4.1 и записаны в виде табл. 4.5 и 4.6 соответственно.

1) Вычислим математические ожидания случайных величин X и Y, используя табл. 4.5 и 4.6.

$$M[X] = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 1,1 ,$$

$$M[Y] = -1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 = -0,1 .$$

Следовательно, математическим ожиданием заданного случайного вектора является вектор $(1,1, -0,1)^T$.

2) Используя табл. 4.4, найдем ряд распределения для случайной величины $X \cdot Y$ (табл. 4.9).

Таблица 4.9

X Y	–2	–1	0	1	2
P_{XY}	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

3) Вычислим математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$, используя табл. 4.9:

$$M[X \cdot Y] = -2 \cdot 0,3 - 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 = -0,3 .$$

Используя формулу (4.11), вычислим ковариацию K_{XY}:

$$K_{XY} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y] = -0,3 - 1,1 \cdot (-0,1) = -0,19 .$$

4) Вычислим дисперсии X и Y, используя табл. 4.5 и 4.6:

$$D[X] = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 - 1,1^2 = 1,9 - 1,21 = 0,69 ,$$

$$D[Y] = 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 - (-0,1)^2 = 0,9 - 0,01 = 0,89 ,$$

а также их среднеквадратические отклонения:

$$\sigma_X \approx \sqrt{0,69} \approx 0,831 ,\ \sigma_Y \approx \sqrt{0,89} \approx 0,943 .$$

Затем по формуле (4.17) найдем коэффициент корреляции:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \approx \frac{-0,19}{0,831 \cdot 0,943} \approx -0,242 .$$

5) Матрица ковариаций случайного вектора имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,69 & -0,19 \\ -0,19 & 0,89 \end{pmatrix},$$

а обобщенная дисперсия равна:

$$|\Sigma| = 0,69 \cdot 0,89 - (-0,19)^2 = 0,6141 - 0,0361 \approx 0,578 .$$

Условные математические ожидания. Функции и линии регрессии

Условным математическим ожиданием $M(X|Y=y)$ дискретной случайной величины X при $Y=y$ называется сумма произведений возможных значений случайной величины X на соответствующие условные вероятности, т. е.

$$M(X|Y=y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P\{X = x_i | Y = y\} . \tag{4.18}$$

Условным математическим ожиданием $M(Y|X=x)$ дискретной случайной величины Y при $X=x$ называется сумма произведений возможных значений случайной величины Y на соответствующие условные вероятности, т. е.

$$M(Y|X=x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot P\{Y = y_j | X = x\} . \tag{4.19}$$

Условное математическое ожидание случайной величины X при $Y=y$ зависит от y, называется *функцией регрессии* или *регрессией случайной величины* X *на* Y и обозначается $m_X(y)$.

Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = x$ зависит от x, называется *функцией регрессии* или *регрессией случайной величины Y на X* и обозначается $m_Y(x)$.

Значения $m_X(y)$ и $m_Y(x)$ изображают набором точек $(x_i, m_Y(x_i))$ и $\left(y_j, m_X\left(y_j\right)\right)$ при $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. Иногда эти точки соединяют отрезками прямых, и полученные ломаные называют *линиями регрессии.*

Задача 4.4. Найти условные математические ожидания дискретного двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$, заданного табл. 4.4. Построить линии регрессии Y на X и X на Y.

Решение. Условные законы распределения случайных величин X и Y найдены в задаче 4.2 и показаны в табл. 4.7 и 4.8.

1) Найдем $m_X(y)$ — регрессию случайной величины X на Y, используя формулу (4.18) и выбирая значения соответствующих условных вероятностей из табл. 4.7:

$$m_X(y_1) = m_X(-1) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1,4,$$

$$m_X(y_2) = m_X(0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0,$$

$$m_X(y_3) = m_X(1) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

В системе координат $(y, m_X(y))$ отметим точки (–1; 1,4), (0; 0) и (1; 1). Соединив их отрезками прямой, получим линию регрессии X на Y (рис. 4.2).

2) Аналогично, найдем $m_Y(x)$ — регрессию случайной величины на Y на X, используя формулу (4.19) и выбирая значения соответствующих условных вероятностей из табл. 4.8:

$$m_Y(x_1) = m_Y(0) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

$$m_Y(x_2) = m_Y(1) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$m_X(x_3) = m_Y(2) = -1 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

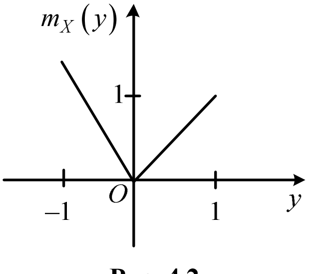

Рис. 4.2

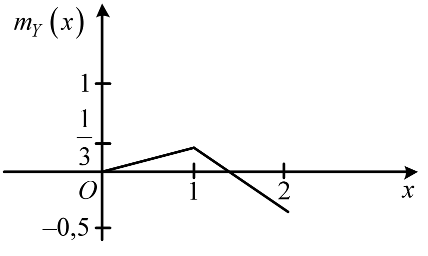

Рис. 4.3

В системе координат $(x, m_Y(x))$ отметим точки $(0; 0)$, $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$. Соединив их отрезками прямой, получим линию регрессии Y на X (рис. 4.3).

Задача 4.5. Закон распределения дискретного двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$ задан табл. 4.10. Найти все числовые характеристики случайного вектора, функции регрессии X на Y и Y на X, построить линии регрессии.

Таблица 4.10

X \ **Y**	**–1**	**0**	**1**	**Σ**
0	0,2	0,1	0,3	0,6
1	0,1	0,2	0,1	0,4
Σ	0,3	0,3	0,4	1

Решение. 1) Заметим, что в последнем столбце табл. 4.10 вычислены вероятности событий $\{X = x_i\}$, а в ее последней строке — вероятности событий $\{Y = y_j\}$. Законы распределения компонент X и Y случайного вектора показаны в табл. 4.11 и 4.12 соответственно.

Таблица 4.11

$\boldsymbol{X}$	0	1	Σ
$\boldsymbol{p_i}$	0,6	0,4	1

Таблица 4.12

$\boldsymbol{Y}$	–1	0	1	Σ
$\boldsymbol{q_j}$	0,3	0,3	0,4	1

2) Вычислим математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения случайных величин X и Y, используя табл. 4.11 и 4.12.

$$M[X] = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 0,4;\ M[Y] = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 = 0,1;$$

$$D[X] = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 - 0,4^2 = 0,4 - 0,16 = 0,24;$$

$$D[Y] = 1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 - 0,1^2 = 0,7 - 0,01 = 0,69;$$

$$\sigma_X \approx \sqrt{0,24} \approx 0,49;\ \sigma_Y \approx \sqrt{0,69} \approx 0,83.$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины $X \cdot Y$, используя табл. 4.10:

$$M[X \cdot Y] = -1 \cdot 0 \cdot 0,2 - 1 \cdot 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 1 \cdot 0,1 = 0.$$

Используя формулы (4.11) и (4.17), вычислим ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции:

$$K_{XY} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y] = 0 - 0,4 \cdot 0,1 = -0,04;$$

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \approx \frac{-0,04}{0,49 \cdot 0,83} \approx -0,098.$$

Корреляционная матрица случайного вектора имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,24 & -0,04 \\ -0,04 & 0,69 \end{pmatrix},$$

а обобщенная дисперсия равна: $|\Sigma| = 0,24 \cdot 0,69 - (0,04)^2 = 0,164$.

3) Найдем $m_X(y)$ — функцию регрессии случайной величины X на Y, используя формулу (4.18) и вычисляя условные вероятности по формуле (4.7). Поскольку из табл. 4.12 следует, что $P\{Y=-1\} = q_1 = 0,3$, то для вычисления условных вероятностей $P\{X = x_i | Y = -1\}$ нужно разделить вероятности первого столбца табл. 4.10 на $q_1 = 0,3$. В результате получим:

$$P\{X=0|Y=-1\} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3},\ P\{X=1|Y=-1\} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

Для вычисления условных вероятностей $P\{X = x_i | Y = 0\}$ нужно разделить вероятности второго столбца табл. 4.10 на $P\{Y=0\} = q_2 = 0,3$ (табл. 4.12). В результате получим:

$$P\{X=0|Y=0\} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3},\ P\{X=1|Y=0\} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично, при делении вероятностей третьего столбца табл. 4.10 на $P\{Y=1\} = q_3 = 0,4$ (см. табл. 4.12), получим:

$$P\{X=0|Y=1\} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4},\ P\{X=1|Y=1\} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}.$$

Результаты внесем в табл. 4.13 — условные законы распределения случайной величины X.

Таблица 4.13

X	0	1	Σ
$\boldsymbol{P\{X = x_i \mid Y = -1\}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\boldsymbol{P\{X = x_i \mid Y = 0\}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\boldsymbol{P\{X = x_i \mid Y = 1\}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Используя формулу (4.18), по табл. 4.13 вычислим условные математические ожидания — функции регрессии случайной величины X на Y:

$$m_X(y_1) = m_X(-1) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$m_X(y_2) = m_X(0) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$m_X(y_3) = m_X(1) = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Линией регрессии X на Y будет ломаная, проходящая через точки $(-1;\ 1/3)$, $(0;\ 2/3)$ и $(1;\ 1/4)$ на плоскости с введенной системой координат $(y, m_X(y))$. Эта линия регрессии показана на рис. 4.4.

4) Найдем $m_Y(x)$ — функцию регрессии случайной величины Y на X, используя формулу (4.19) и вычисляя условные вероятности по формуле (4.8). Поскольку из табл. 4.11 следует, что $P\{X=0\} = p_1 = 0{,}6$ и $P\{X=1\} = p_2 = 0{,}4$, то условные вероятности получатся при делении вероятностей первой и второй строк табл. 4.10 на $p_1 = 0{,}6$ и $p_2 = 0{,}4$ соответственно, т. е.

$$P\{Y=-1|X=0\} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3},\ P\{Y=0|X=0\} = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6},\ P\{Y=1|X=0\} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2}.$$

$$P\{Y=-1|X=1\} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4},\ P\{Y=0|X=1\} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{1}{2},\ P\{Y=1|X=1\} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}.$$

Результаты внесем в табл. 4.14 — условные законы распределения случайной величины Y.

Таблица 4.14

$\boldsymbol{Y}$	–1	0	1	Σ
$\boldsymbol{P\{Y = y_j \mid X = 0\}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
$\boldsymbol{P\{Y = y_j \mid X = 1\}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Используя формулу (4.19), по табл. 4.14 вычислим условные математические ожидания — функции регрессии случайной величины Y на X:

$$m_Y(x_1) = m_Y(0) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$m_Y(x_2) = m_Y(1) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Линией регрессии Y на X будет прямая, проходящая через точки $(0;\, 1/6)$ и $(1;\, 0)$ на плоскости с введенной системой координат $(x,\, m_Y(x))$. Эта линия регрессии показана на рис. 4.5.

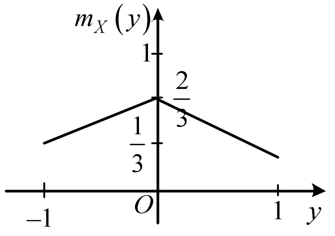

Рис. 4.4

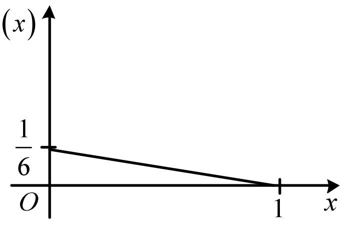

Рис. 4.5

Функция распределения двумерного дискретного случайного вектора

Из определения функции совместного распределения случайного вектора (4.1) следует, что для двумерного дискретного случайного вектора $(X, Y)^T$, заданного табл. 4.1, значение функции распределения $F(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in R^2$ равно сумме вероятностей p_{ij}, для которых $x_i < x$ и $y_j < y$, т. е.

$$F(x, y) = \sum_{i,\, j:\, x_i < x,\, y_j, y} p_{ij}\text{, для всех } (x, y) \in R^2. \tag{4.20}$$

Задача 4.6. Закон распределения дискретного двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$ задан табл. 4.10. Найти функции распределения его компонент и функцию совместного распределения.

Решение. 1) В задаче 4.5 были получены маргинальные законы распределения случайных величин X и Y (см. табл. 4.11 и 4.12). Поэтому функции распределения компонент случайного вектора можно определить по формулам (см. (3.3)) в виде:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}6, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le -1, \\ 0{,}3, & -1 < y \le 0, \\ 0{,}6, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases} \tag{4.21}$$

2) Функцию совместного распределения случайных величин X и Y определим по формуле (4.20). Для этого в системе координат (x, y) отметим на осях возможные значения случайных величин X и Y, а также точки, координаты которых равны возможным парам значений случайных величин X и Y. Обозначим эти точки:

$$A(0;-1),\ B(1;-1),\ O(0;0),\ C(1;0),\ E(0;1),\ F(1;1), \tag{4.22}$$

и проведем через них прямые, параллельные координатным осям. Эти прямые разобьют всю плоскость на области (рис. 4.6), в которых $F(x, y)$ будет постоянной.

- Область D_1, для которой $x \le 0$ или $y \le -1$, события $X < x$ и $Y < y$ — невозможные, т. к. этим условиям не удовлетворяет ни одно возможное значение случайного вектора. Поэтому в этой области $F(x, y) = 0$.
- В области D_2, для которой $\begin{cases} x > 1, \\ y > 1 \end{cases}$ событие $X < x$ и $Y < y$ — достоверное для каждой точки (x, y) из этой области, т. к. этому условию удовлетворяют все значения случайного вектора. Поэтому для всех точек этой области $F(x, y) = 1$.

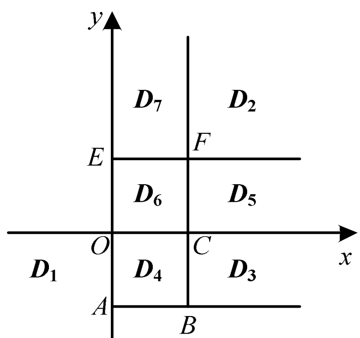

Рис. 4.6

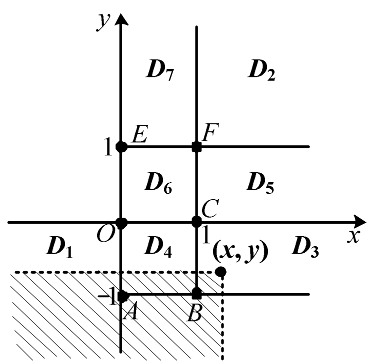

Рис. 4.7

- Для всех точек (x, y) области D_3, для которой $\begin{cases} x > 1, \\ -1 < y \le 0 \end{cases}$ (рис. 4.7), в область, соответствующую условию $X < x$ и $Y < y$ (на рис. 4.7 она заштрихована), попадают две точки из (4.22): $A(0; -1)$ и $B(1; -1)$. Эти точки соответствуют двум возможным значениям случайного вектора $\begin{cases} x = 0, \\ y = -1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$

  Вероятности, с которыми принимаются эти значения, определяются из табл. 4.10. Следовательно, для всех точек $(x, y) \in D_3$:

$$F(x, y) = P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = -1\} = p_{11} + p_{21} = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 .$$

- Область D_4 задана неравенствами: $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ -1 < y \le 0 \end{cases}$ (рис. 4.8).

  Для любой точки $(x, y) \in D_4$ в область, соответствующую условию $X < x$ и $Y < y$ (на рис. 4.8 она заштрихована), попадает только одна точка $A(0; -1)$, соответствующая возможному значению случайного вектора $\begin{cases} x=0, \\ y=-1, \end{cases}$ которое принимается с вероятностью $P\{X=0, Y=-1\}=p_{11}=0{,}2$. Следовательно, $F(x, y)=0{,}2$ при $(x, y)\in D_4$.

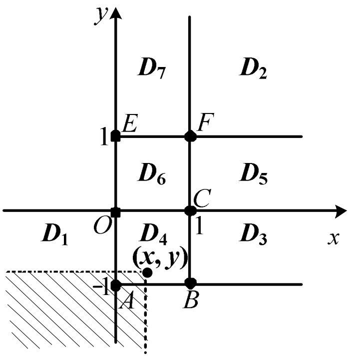

Рис. 4.8

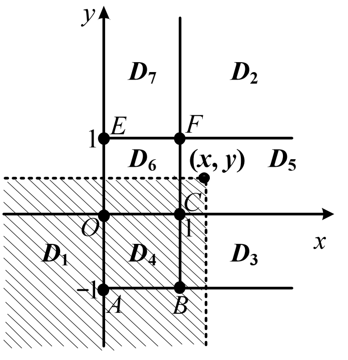

Рис. 4.9

- Для точек $(x, y)\in D_5$, заданной неравенствами $\begin{cases} x>1, \\ 0<y\le 1, \end{cases}$ условию $X<x$ и $Y<y$ удовлетворяют координаты точек $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $O(0;0)$, $C(1;0)$ (рис. 4.9).

  Эти точки соответствуют возможным значениям случайного вектора:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-1, \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$$

  которые, в соответствии с табл. 4.10, принимаются с вероятностями:

$$p_{11}=0{,}2,\ p_{21}=0{,}1,\ p_{12}=0{,}1 \text{ и } p_{22}=0{,}2$$

  соответственно. Поэтому $F(x, y)=p_{11}+p_{21}+p_{12}+p_{22}=0{,}2+0{,}1+0{,}1+0{,}2=0{,}6$ при $(x, y)\in D_5$.

- Рассуждая аналогично для точек областей D_6 и D_7, получим, что:

$$F(x, y)=P\{X=0, Y=-1\}+P\{X=0, Y=0\}=p_{11}+p_{12}=0{,}2+0{,}1=0{,}3,$$

  для всех $(x, y)\in D_6$, при которых $\begin{cases} 0<x\le 1, \\ 0<y\le 1. \end{cases}$

$$F(x, y)=P\{X=0, Y=-1\}+P\{X=0, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}= \\ =p_{11}+p_{12}+p_{13}=0{,}2+0{,}1+0{,}3=0{,}6,$$

  для всех $(x, y)\in D_7$, при которых $\begin{cases} 0<x\le 1, \\ y>1. \end{cases}$

Полученные значения функции распределения $F(x, y)$ внесем в табл. 4.15.

Таблица 4.15

	$y \le -1$	$-1 < y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,2	0,3	0,6
$x > 1$	0	0,3	0,6	1

3) Можно проверить полученный результат. Из соотношений (4.2) следует, что

$$\lim_{\substack{y\to+\infty \\ \forall\, x\in R}} F(x,y) = F(x,+\infty) = F_X(x), \quad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ \forall\, y\in R}} F(x,y) = F(+\infty, y) = F_Y(y).$$

Учитывая, что $y = +\infty$ (бесконечная точка) принадлежит интервалу $y > 1$, то значения функции распределения компоненты X случайного вектора содержатся в последнем столбце табл. 4.15, т. е.

$$F_X(x) = \begin{bmatrix} 0, & x \le 0, \\ 0{,}6, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{bmatrix}$$

Учитывая, что $x = +\infty$ (бесконечная точка) принадлежит интервалу $x > 1$, то значения функции распределения компоненты X случайного вектора содержатся в последней строке табл. 4.15, т. е.

$$F_Y(y) = \begin{bmatrix} 0, & y \le -1, \\ 0{,}3, & -1 < y \le 0, \\ 0{,}6, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y \ge 1. \end{bmatrix}$$

Сравнивая полученные соотношения с (4.21), убедимся, что они совпадают.

Замечание

Задачи 4.7 и 4.8 предлагается решить самостоятельно.

Задача 4.7. Построить функцию распределения двумерного дискретного случайного вектора $(X, Y)^T$, совместный закон распределения которого задан табл. 4.16.

Задача 4.8. Закон распределения дискретного случайного вектора задан табл. 4.17. Найти: 1) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 6\}$; 2) числовые характеристики случайного вектора; 3) функции регрессии X на Y и Y на X.

Таблица 4.16

X \ Y	**0**	**1**	**2**
1	0,2	0,2	0,1
2	0,35	0,1	0,05

Таблица 4.17

X \ Y	**1**	**2**	**3**
0	0,2	0,1	0,15
1	0,1	0,05	0,1
2	0,2	0	0,1

4.4. Непрерывный случайный вектор

Плотность и функция распределения непрерывного двумерного случайного вектора

Двумерный случайный вектор $(X, Y)^T$ называется *непрерывным*, если его функция распределения $F(x, y)$ непрерывна, дифференцируема по каждому аргументу и имеет конечную смешанную производную $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.

Закон распределения непрерывного случайного вектора задается функцией распределения или плотностью распределения.

Неотрицательная интегрируемая на всей плоскости функция $f(x, y)$ называется *плотностью распределения* или просто *плотностью* непрерывного двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$, если она удовлетворяет равенству

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 , \tag{4.23}$$

где $F(x, y)$ — функция распределения.

Замечание

Плотность распределения $f(x, y)$ непрерывного случайного вектора $(X, Y)^T$ обычно называют *совместной* плотностью распределения, в отличие от плотностей распределения его компонент.

Для плотности распределения двумерного случайного вектора справедливы следующие свойства:

1. Если $F(x, y)$ — функция распределения непрерывного случайного вектора, то из (4.23) дифференцированием по переменным x и y следует, что

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} . \tag{4.24}$$

2. Поскольку $F(x, y)$ не убывает по каждому из аргументов, то

$$f(x, y) \geq 0, \ \forall (x, y) \in R^2 .$$

3. Из того, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\,dt_1 dt_2 = F(+\infty, +\infty) = P\{X < +\infty, Y < +\infty\}$, следует условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy = 1, \tag{4.25}$$

которое называется условием *нормированности.*

4. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D определяется интегралом

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy . \tag{4.26}$$

5. Если плотность распределения непрерывного двумерного случайного вектора задана соотношениями (равномерное распределение)

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

и если S — площадь области $D \subset R^2$, то $A = \dfrac{1}{S}$, т. к. в этом случае условие нормировки принимает вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D A\,dxdy = AS = 1 .$$

Задача 4.9. Найти функцию распределения двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$, если известна плотность его совместного распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2\left(1 + x^2\right)\cdot\left(1 + y^2\right)} .$$

Решение. Используя формулу (4.23), запишем выражение для функции распределения в виде несобственного интеграла:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\,dt_1 dt_2 = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{\left(1 + t_1^2\right)\cdot\left(1 + t_2^2\right)}\,dt_1\,dt_2$$

и расставим в нем пределы интегрирования

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\left(1 + t_1^2\right)}\,dt_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{\left(1 + t_2^2\right)}\,dt_2 .$$

Получим

$$F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg} t_1\Big|_{-\infty}^{x}\cdot\operatorname{arctg} t_2\Big|_{-\infty}^{y}=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{arctg} y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Функции и плотности распределения компонент непрерывного случайного вектора

Пусть $F(x, y)$ — функция распределения непрерывного двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$. Из пятого свойства функции распределения следует, что функции распределения компонент случайного вектора, т. е. случайных величин X и Y, можно найти по формулам:

$$\lim_{y\to+\infty} F(x,y)=F_X(x),\ \lim_{x\to+\infty} F(x,y)=F_Y(y). \tag{4.27}$$

Если $f(x, y)$ — плотность непрерывного двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$, то частные (маргинальные) плотности распределения его компонент $f_X(x)$ для случайной величины X и $f_Y(y)$ для случайной величины Y определяются по формулам:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx. \tag{4.28}$$

Для того чтобы случайные величины X и Y, являющиеся компонентами непрерывного случайного вектора $(X, Y)^T$, были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения $F(x, y)$ случайного вектора была равна произведению функций распределения его компонент, т. е.

$$F(x, y)=F_X(x)\cdot F_Y(y), \tag{4.29}$$

где $F_X(x)$, $F_Y(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y соответственно, а его плотность распределения $f(x, y)$ была равна произведению плотностей распределения его компонент, т. е.

$$f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y), \tag{4.30}$$

где $f_X(x)$, $f_Y(y)$ — плотности распределения случайных величин X и Y соответственно.

Задача 4.10. Найти плотность распределения $f(x, y)$ двумерного случайного вектора $(X, Y)^T$, а также функции и плотности распределения его компонент, если известна функция его совместного распределения

$$F(x, y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & x<0 \vee y<0, \\ \left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-5y}\right), & x>0,\ \ y>0. \end{array}\right.$$

Выяснить, будут ли случайные величины X и Y независимы.

Решение. 1) Плотность совместного распределения вектора найдем, используя формулу (4.24):

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-5y}\right)\right) = \begin{cases} 0, & x<0 \vee y<0, \\ 3e^{-3x}\cdot 5e^{-5y}, & x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2) По формулам (4.28) найдем плотности распределения компонент случайного вектора $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Плотность случайной величины X:

- если $x<0$, то $f_X(x)=0$, т. к. в этом случае $f(x, y)=0$;
- если $x \ge 0$, то

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = 15e^{-3x}\int_0^{+\infty} e^{-5y}dy = 15e^{-3x}\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-5y}\Big|_0^{+\infty} = 3e^{-3x}.$$

Следовательно, случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 3$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 3e^{-3x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Аналогично, определяется плотность случайной величины Y:

- если $y<0$, то $f_Y(y)=0$, т. к. в этом случае $f(x, y)=0$;
- если $y \ge 0$, то

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 15e^{-5y}\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = 15e^{-5y}\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\Big|_0^{+\infty} = 5e^{-5y}.$$

Следовательно, случайная величина Y распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 5$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0, \\ 5e^{-5y}, & y \ge 0. \end{cases}$$

Поскольку справедливо равенство $f(x, y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

3) По заданной функции $F(x, y)$ совместного распределения найдем функции распределения случайных величин X и Y, используя формулы (4.27). Для случайной величины X получим:

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \left(1-e^{-3x}\right)\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1-e^{-5y}\right) = 1-e^{-3x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

что соответствует функции распределения показательного закона. Аналогично, вычисляя предел функции распределения $F(x, y)$ при $x \to +\infty$, получим выражение для функции распределения случайной величины Y в виде:

$$F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & y<0, \\ \left(1-e^{-5y}\right)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-3x}\right) = 1-e^{-5y}, & y \ge 0, \end{cases}$$

что соответствует показательному закону. Поскольку справедливо равенство $F(x, y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

Условные плотности распределения непрерывного случайного вектора

Пусть $(X, Y)^T$ — непрерывный двумерный случайный вектор, $f(x, y)$ — плотность совместного распределения случайного вектора, а $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ — плотности распределения его компонент. Условные плотности распределения определяются из соотношений:

$$f_X(x|Y=y) = \begin{cases} 0, & f_Y(y)=0, \\ \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y)\ne 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

$$f_Y(y|X=x) = \begin{cases} 0, & f_X(x)=0, \\ \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)\ne 0. \end{cases} \tag{4.32}$$

Для того чтобы случайные величины X и Y, являющиеся компонентами непрерывного случайного вектора $(X, Y)^T$, были независимы, необходимо и достаточно, чтобы их условные плотности распределения совпадали с безусловными, т. е. $f_X(x|Y=y) = f_X(x)$ и $f_Y(y|X=x) = f_Y(y)$.

Задача 4.11. Задана плотность совместного распределения случайных величин X и Y

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{cases}$$

где область D задана неравенствами $D = \{(x, y):\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 4\}$.

Найти: 1) параметр C; 2) $P\left\{(X, Y)^T \in D_1\right\}$, если $D_1 = \{(x, y):\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 2-x\}$; 3) плотности распределения случайных величин X и Y; 4) условные плотности $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$; 5) выяснить, являются ли независимыми компоненты случайного вектора X и Y.

Решение. 1) Область D показана на рис. 4.10. Постоянную C можно найти из условия нормированности плотности распределения (4.25). Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy = C\iint\limits_D xydxdy = C\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^4 ydy = C\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = C\cdot 16 = 1,$$

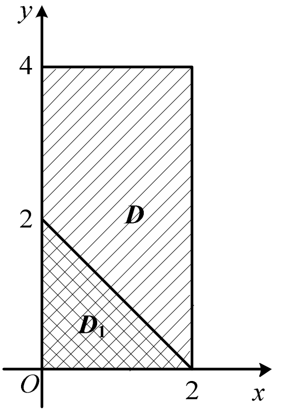

Рис. 4.10

то $C=\dfrac{1}{16}$. Поэтому $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ \dfrac{xy}{16}, & (x,y)\in D. \end{cases}$

2) Область D_1 отмечена на рис. 4.10 двойной штриховкой. По свойству плотности распределения (4.26) искомая вероятность равна:

$$P\left\{(X,Y)^T\in D_1\right\}=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1}\frac{xy}{16}dxdy=\frac{1}{16}\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{2-x} ydy=\frac{1}{16}\int\limits_0^2 x\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2-x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_0^2 x\cdot\frac{(2-x)^2}{2}dx=\frac{1}{32}\int\limits_0^2\left(4x-4x^2+x^3\right)dx=\frac{1}{32}\left.\left(2x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^2=$$

$$=\frac{1}{32}\cdot\left(8-\frac{32}{3}+4\right)=\frac{1}{24}.$$

3) Плотности распределения компонент X и Y вычисляются по формулам (4.28).

❒ При $x\notin[0;2]$ $f_X(x)=0$, т. к. при этом условии $f(x,y)=0$.

❒ При $x\in[0;2]$ $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{16}x\int\limits_0^4 y\,dy=\frac{1}{16}x\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4=\frac{1}{2}x$.

Следовательно, плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[0;2], \\ \dfrac{1}{2}x, & x\in[0;2]. \end{cases}$$

❒ При $y\notin[0;4]$ $f_Y(y)=0$, т. к. при этом условии $f(x,y)=0$.

❒ При $y\in[0;4]$ $f_Y(y)=\frac{1}{16}y\int\limits_0^2 x\,dx=\frac{1}{16}y\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\frac{1}{8}y$.

Следовательно, плотность распределения случайной величины Y имеет вид:

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\notin[0;4], \\ \dfrac{1}{8}y, & y\in[0;4]. \end{cases}$$

4) Условные плотности распределения компонент X и Y вычисляются по формулам (4.31) и (4.32).

$$f_X(x|Y=y)=\begin{cases}0, & f_Y(y)=0\\ \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y)\neq 0\end{cases}=\begin{cases}0, & y=0\vee(x,y)\notin D\\ \dfrac{\frac{1}{16}xy}{\frac{1}{8}y}=\dfrac{1}{2}x, & y\neq 0,(x,y)\in D\end{cases}=\begin{cases}0, & x\notin[0;2],\\ \dfrac{1}{2}x, & x\in[0;2].\end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x)=\begin{cases}0, & f_X(x)=0\\ \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)\neq 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x=0\vee(x,y)\notin D\\ \dfrac{\frac{1}{16}xy}{\frac{1}{2}x}=\dfrac{1}{8}y, & x\neq 0,(x,y)\in D\end{cases}=\begin{cases}0, & y\notin[0;4],\\ \dfrac{1}{8}y, & y\in[0;4].\end{cases}$$

5) Случайные величины X и Y независимы, поскольку

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin D\\ \dfrac{xy}{16}, & (x,y)\in D\end{cases}=\begin{cases}0, & (x,y)\notin D\\ \dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{1}{8}y, & (x,y)\in D\end{cases}=f_X(x)\cdot f_Y(y),$$

а также

$$f_X(x|Y=y)=f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0;2],\\ \dfrac{1}{2}x, & x\in[0;2];\end{cases}\qquad f_Y(y|X=x)=f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\notin[0;4],\\ \dfrac{1}{8}y, & y\in[0;4].\end{cases}$$

Задача 4.12. Задана плотность распределения двумерного непрерывного случайного вектора

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin D,\\ C, & (x,y)\in D,\end{cases}$$

где область $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\}$.

Найти: 1) постоянную C; 2) плотности компонент вектора $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; 3) условные плотности $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$; 4) выяснить, будут ли случайные величины X и Y независимы.

Решение. 1) Область D показана на рис. 4.11. Распределение равномерное и площадь области D равна: $S(D)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$. Следовательно, по пятому свойству плотности распределения справедливо:

$$C=\frac{1}{S(D)}=1.$$

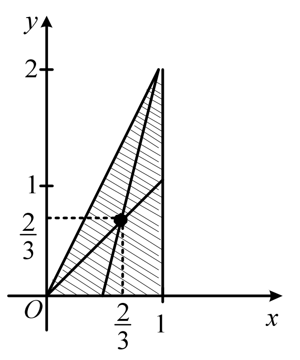

Рис. 4.11

Тогда для плотности распределения $f(x, y)$ справедливы соотношения:

$$f(x, y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & (x, y) \notin D, \\ 1, & (x, y) \in D. \end{array}\right.$$

2) Найдем плотности распределения случайных величин X и Y по формулам (4.28). Учитывая, что плотность $f(x, y)$ отлична от нуля только в точках области D, т. е.

$$(x, y) \in D, \text{ если } \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 \le y \le 2, \\ \dfrac{y}{2} \le x \le 1, \end{cases}$$

получим:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy = \left[\begin{array}{ll} 0, & x \notin [0; 1], \\ \displaystyle\int_0^{2x} 1\,dy = 2x, & x \in [0; 1]. \end{array}\right.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \left[\begin{array}{ll} 0, & y \notin [0; 2], \\ \displaystyle\int_{\frac{y}{2}}^{1} 1\,dx = 1 - \frac{y}{2}, & y \in [0; 2]. \end{array}\right.$$

Поскольку $f(x, y) \ne f_X(x) \cdot f_Y(y)$, то случайные величины X и Y зависимы.

3) По формулам (4.31) и (4.32) найдем условные плотности распределения случайных величин X и Y:

$$f_X(x|Y = y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & y = 2 \vee (x, y) \notin D \\ \dfrac{1}{1 - \frac{y}{2}} = \dfrac{2}{2 - y}, & y \ne 2, (x, y) \in D \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 0, \ y \notin [0; 2), \\ \dfrac{2}{2 - y}, \ y \in [0; 2). \end{array}\right.$$

$$f_Y(y|X = x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x = 0 \vee (x, y) \notin D \\ \dfrac{1}{2x}, & x \ne 0, (x, y) \in D \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 0, \ x \notin (0; 1], \\ \dfrac{1}{2x}, \ x \in (0; 1]. \end{array}\right.$$

4) Условные плотности распределения случайных величин X и Y не совпадают с их безусловными плотностями, поэтому X и Y зависимы.

Числовые характеристики непрерывного двумерного случайного вектора

Математическое ожидание

Математическим ожиданием двумерного непрерывного случайного вектора $(X, Y)^T$, плотность распределения которого $f(x, y)$, называется числовой вектор $(M[X], M[Y])^T$, компоненты которого вычисляются по формулам:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy, \quad M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dxdy. \tag{4.33}$$

Дисперсия

Дисперсии случайных величин X и Y можно вычислить через совместную плотность распределения $f(x, y)$ по формулам:

$$\begin{aligned} D[X]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dxdy-(M[X])^2, \\ D[Y]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy-(M[Y])^2. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Если известны плотности распределения компонент непрерывного случайного вектора $f_X(x)$ и $f_Y(x)$, то математическое ожидание и дисперсию этого случайного вектора можно найти по формулам:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx, \quad M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy. \tag{4.35}$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx-(M[X])^2, \quad D[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy-(M[Y])^2. \tag{4.36}$$

Корреляционный момент

Корреляционный момент или ковариация, которая определяется соотношением

$$\operatorname{cov}(X;Y)=K_{XY}=M[(X-M[X])(Y-M[Y])],$$

для непрерывных случайных величин X и Y вычисляется по формуле

$$K_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X])(y-M[Y])\,f(x,y)\,dxdy, \tag{4.37}$$

или

$$K_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,f(x,y)\,dxdy-M[X]\cdot M[Y]. \tag{4.38}$$

Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции r_{XY} непрерывных случайных величин X и Y вычисляется по формуле, аналогичной формуле для коэффициента корреляции дискретных случайных величин

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}, \tag{4.39}$$

где $\sigma_X=\sqrt{D[X]}$, $\sigma_Y=\sqrt{D[Y]}$.

Корреляционная матрица и обобщенная дисперсия

$$\Sigma=\begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{pmatrix},\quad |\Sigma|=\begin{vmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{vmatrix}=D[X]\cdot D[Y]-K_{XY}^2 .$$

Замечание

Для числовых характеристик непрерывного случайного вектора выполнены все свойства числовых характеристик дискретного случайного вектора.

Задача 4.13. Найти числовые характеристики двумерного непрерывного случайного вектора, заданного в задаче 4.12.

Решение. 1) Математическое ожидание вычислим по формулам (4.33).

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D x\cdot 1\,dx\,dy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{2x}dy=\int\limits_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$$M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D y\cdot 1\,dxdy=\int\limits_0^2 ydy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{1}dx=\int\limits_0^2 y\left(1-\tfrac{y}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3},$$

т. е. математическим ожиданием является вектор $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)^T$.

2) Для вычисления дисперсий случайных величин X и Y используем формулы (4.34):

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dxdy-(M[X])^2=\iint\limits_D x^2dxdy-\left(\frac{2}{3}\right)^2=$$

$$=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{2x}dy-\frac{4}{9}=\int\limits_0^1 2x^3dx-\frac{4}{9}=\frac{2}{4}x^4\Big|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

$$D[Y]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy-(M[Y])^2=\iint\limits_D y^2dxdy-\left(\frac{2}{3}\right)^2=$$

$$=\int\limits_0^2 y^2dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{1}dx-\frac{4}{9}=\int\limits_0^2 y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)dy-\frac{4}{9}=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_0^2-\frac{4}{9}=\frac{8}{3}-2-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

3) Среднеквадратические отклонения:

$$\sigma_X=\sqrt{D[X]}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}},\quad \sigma_Y=\sqrt{D[Y]}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

4) Ковариацию вычислим по формуле (4.38).

$$K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f(x;y)\,dxdy - M[X]\cdot M[Y] = \iint\limits_{D} xy\,dxdy - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \int\limits_{0}^{1} x\,dx \int\limits_{0}^{2x} y\,dy - \frac{4}{9} =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} x\,dx\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{0}^{2x}\right) - \frac{4}{9} = 2\int\limits_{0}^{1} x^3 dx - \frac{4}{9} = 2\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

а коэффициент корреляции по формуле (4.39):

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2}.$$

5) Матрица ковариаций и обобщенная дисперсия случайного вектора равны:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, \ |\Sigma| = \begin{vmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{YX} & D[Y] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{vmatrix} = \frac{1}{18}\frac{2}{9} - \frac{1}{18}\frac{1}{18} = \frac{1}{108}.$$

Функции регрессии и линии регрессии непрерывного двумерного случайного вектора

Условное математическое ожидание непрерывной случайной величины X при $Y = y$ определяется интегралом

$$M(X|Y=y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x|Y=y)\,dx. \tag{4.40}$$

Условное математическое ожидание непрерывной случайной величины Y при $X = x$ определяется интегралом

$$M(Y|X=x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y|X=x)\,dy, \tag{4.41}$$

где $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$ — условные плотности распределения случайных величин X и Y.

Условное математическое ожидание случайной величины X при $Y = y$ обозначается: $m_X(y)$, является функцией переменной y и называется *функцией регрессии* или *регрессией* случайной величины X на Y.

Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = x$ обозначается: $m_Y(x)$, является функцией переменной x и называется *функцией регрессии* или *регрессией* случайной величины Y на X.

Линии $y = m_Y(x)$ и $x = m_X(y)$ называются *линиями регрессии.* Если линиями регрессии являются прямые, то регрессия называется линейной. Линии линейной регрессии пересекаются в точке, координатами которой являются математические ожидания случайных величин X и Y.

Если случайные величины X и Y независимы, то условные математические ожидания равны безусловным математическим ожиданиям, т. е. выполняются равенства: $m_Y(x) = M[Y]$, $m_X(y) = M[X]$, а тогда линии регрессии параллельны координатным осям.

Однако из того, что условные математические ожидания совпадают с безусловными, а линии регрессии оказываются параллельными координатным осям, нельзя делать вывод о независимости случайных величин. Они могут быть зависимыми.

Задача 4.14. Найти функции регрессии двумерного непрерывного случайного вектора, заданного в задаче 4.12. Построить линии регрессии.

Решение. Условные плотности распределения, вычисленные в задаче 4.12, имеют вид:

$$f_X(x|Y=y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & y \notin [0;2), \\ \dfrac{2}{2-y}, & y \in [0;2); \end{array}\right. \qquad f_Y(y|X=x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x \notin (0;1], \\ \dfrac{1}{2x}, & x \in (0;1]. \end{array}\right.$$

1) Функция регрессии случайной величины X на Y вычисляется по формуле (4.40).

❒ При $y \in [0;2)$, учитывая, что для точек области D (см. рис. 4.11) справедливо неравенство $\dfrac{y}{2} \le x \le 1$, можно записать:

$$m_X(y) = \int_{y/2}^{1} x \cdot \frac{2}{2-y} dx = \frac{2}{2-y} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y/2}^{1} = \frac{1-\left(\dfrac{y}{2}\right)^2}{2-y} = \frac{4-y^2}{4(2-y)} = \frac{2+y}{4}.$$

❒ При $y \notin [0;2)$ $m_X(y) = \int_{y/2}^{1} x \cdot 0 dx = 0$. Поэтому

$$m_X(y) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{2+y}{4}, & y \in [0;2), \\ 0, & y \notin [0;2). \end{array}\right.$$

2) Функция регрессии случайной величины Y на X вычисляется по формуле (4.41).

❒ При $x \in (0;1]$, учитывая, что для точек области D (см. рис. 4.11) справедливо неравенство $0 \le y \le 2x$, можно записать:

$$m_Y(x) = \int_{0}^{2x} y \frac{1}{2x} dy = \frac{1}{2x} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{2x} = \frac{4x^2}{4x} = x.$$

❒ При $x \notin (0;1]$ $m_Y(x) = \int\limits_0^{2x} y \cdot 0\, dy = 0$. Поэтому

$$m_Y(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;1], \\ 0, & x \notin (0;1]. \end{cases}$$

Линии регрессии $y = x$ и $x = \frac{2+y}{4}$ внутри области D выделены на рис. 4.11 жирными линиями. Линиями регрессии являются прямые, т. е. регрессия линейная. Точкой пересечения линий регрессии является точка $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Ее координатами являются математические ожидания случайных величин X и Y.

Задача 4.15. Задана плотность совместного распределения случайных величин X и Y:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin D, \\ Cxy, & (x, y) \in D, \end{cases}$$

где область $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}$.

Найти: 1) параметр C; 2) плотности распределения случайных величин X и Y; 3) условные плотности $f(x|Y = y)$ и $f(y|X = x)$; 4) математические ожидания и условные математические ожидания случайных величин X и Y; 5) построить линии регрессии; выяснить, являются ли независимыми компоненты случайного вектора X и Y.

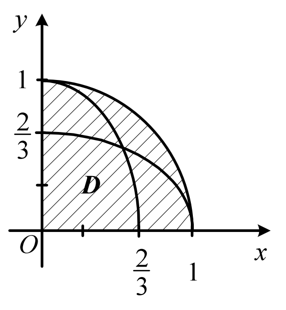

Рис. 4.12

Решение. 1) Область D показана на рис. 4.12. Постоянную C можно найти из условия нормированности плотности распределения (4.25), т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = C \iint\limits_D xydxdy = 1.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, получим

$$C \iint\limits_D xydxdy = C \iint\limits_D \rho\cos\varphi \cdot \rho\sin\varphi \cdot \rho d\varphi d\rho = \frac{C}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = 1,$$

$\frac{C}{2} \cdot \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 = 1$, $\frac{C}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = 1$, $\frac{1}{8}C = 1$. Следовательно, $C = 8$ и поэтому

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin D, \\ 8xy, & (x, y) \in D. \end{cases}$$

2) Плотности распределения компонент X и Y вычисляются по формулам (4.28).

❐ При $x \notin [0;1]$ $f_X(x) = 0$, т. к. при этом условии $f(x,y) = 0$.

❐ При $x \in [0;1]$ $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = 8x \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = 8x \left.\dfrac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2}} = 4x\left(1-x^2\right)$.

Следовательно, плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x\left(1-x^2\right), & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Поскольку область D симметрична относительно координатных осей и плотность совместного распределения $f(x,y)$ симметрична относительно переменных x и y, то плотность распределения случайной величины Y имеет вид:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y\left(1-y^2\right), & y \in [0;1], \\ 0, & y \notin [0;1]. \end{cases}$$

3) По формулам (4.31) и (4.32) найдем условные плотности распределения случайных величин X и Y:

$$f_X(x|Y=y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \vee y = 1 \vee (x,y) \notin D, \\ \dfrac{8xy}{4y\left(1-y^2\right)} = \dfrac{2x}{1-y^2}, & y \neq 0,\ y \neq 1,\ (x,y) \in D. \end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \vee x = 1\, (x,y) \notin D, \\ \dfrac{8xy}{4x\left(1-x^2\right)} = \dfrac{2y}{1-x^2}, & x \neq 0,\ x \neq 1,\ (x,y) \in D. \end{cases}$$

Условные плотности распределения не совпадают с безусловными плотностями, поэтому случайные величины X и Y зависимы.

4) Математические ожидания случайных величин X и Y вычисляются по формулам (4.35):

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int\limits_0^1 4x^2\left(1-x^2\right)dx = 4\int\limits_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx =$$

$$= 4\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}.$$

$$M[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int\limits_0^1 4y^2\left(1-y^2\right)dx = \frac{8}{15}.$$

5) Условные математические ожидания вычисляются по формулам (4.40) и (4.41):

- $M(X|Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|Y=y)\,dx=\int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x\frac{2x}{1-y^2}\,dx=\frac{2}{1-y^2}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x^2dx=$

$$=\frac{2}{1-y^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{1-y^2}\frac{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^3}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{1-y^2} \text{ при } y\in(0;1);$$

- $M(X|Y=y)=0$ при $y\notin(0;1)$.

Аналогично,

- $M(Y|X=x)=y=\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\frac{2y}{1-x^2}\,dy=\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$ при $x\in(0;1)$;
- $M(Y|X=x)=0$ при $x\notin(0;1)$.

6) Линии регрессии — части эллипсов $x=\frac{2}{3}\sqrt{1-y^2}$ и $y=\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$, лежащие внутри области D. На рис. 4.12 они выделены жирными линиями.

Задача 4.16. Задана плотность совместного распределения случайных величин X и Y:

$$f(x,y)=\left[\begin{array}{l}0,\quad (x,y)\notin D,\\ \frac{1}{4},\quad (x,y)\in D,\end{array}\right.$$

где область $D=\{(x,y):-1\le x\le 1,\ x-1\le y\le x+1\}$.

Найти: 1) плотности распределения случайных величин X и Y; 2) функции распределения X и Y; 3) условные плотности $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$; 4) числовые характеристики случайного вектора; 5) функции регрессии Y на X и X на Y. Построить линии регрессии и выяснить, являются ли независимыми случайные величины X и Y.

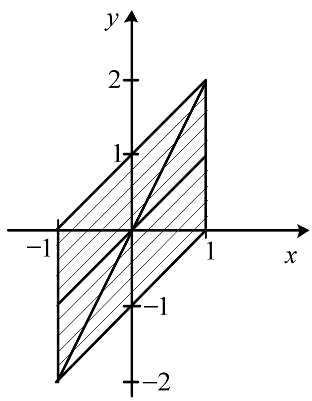

Рис. 4.13

Решение. Область D показана на рис. 4.13.

1) Плотности распределения случайных величин X и Y найдем, используя формулы (4.28). Плотность распределения случайной величины X:

- при $x\notin[-1;1]$ $f_X(x)=0$, т. к. при этом условии $f(x,y)=0$;
- при $x\in[-1;1]$, учитывая, что для точек области D (см. рис. 4.13) справедливо неравенство $x-1\le y\le x+1$, можно записать:

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int\limits_{x-1}^{x+1}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{4}y\bigg|_{x-1}^{x+1}=\frac{1}{4}(x+1-x+1)=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-1,\ 1]$, т. е.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [-1,\ 1], \\ 0, & x \notin [-1,\ 1]. \end{cases}$$

Плотность распределения случайной величины Y:

- при $y \notin [-2,\ 2]$ $f_Y(y) = 0$, т. к. при этом условии $f(x, y) = 0$;
- при $y \in [-2,\ 0]$, учитывая, что в этом случае $-1 \le x \le y+1$ (см. рис. 4.13), можно записать:

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_{-1}^{y+1} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}x\Big|_{-1}^{y+1} = \frac{1}{4}(y+1+1) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2};$$

- при $y \in [0,\ 2]$, учитывая, что в этом случае $y-1 \le x \le 1$ (см. рис. 4.13), справедливо:

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_{y-1}^{1} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}x\Big|_{y-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-y+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y.$$

Следовательно, плотность распределения случайной величины Y имеет вид:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -2, \\ \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{2}, & -2 \le y \le 0, \\ -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{2}, & 0 \le y \le 2, \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

Графики функций $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ показаны на рис. 4.14 и 4.15.

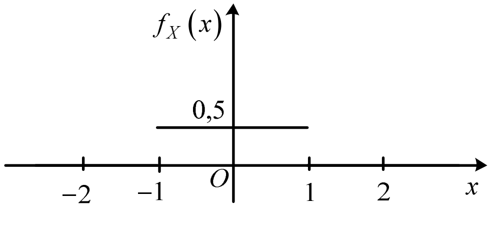

Рис. 4.14

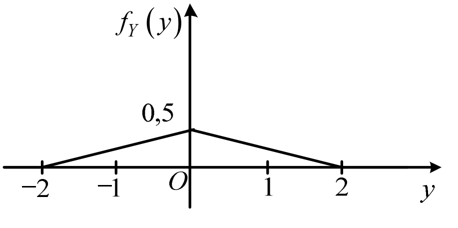

Рис. 4.15

2) Поскольку случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-1,\ 1]$, то ее функцию распределения можно определить по соотношениям (см. (3.22)) для функции распределения равномерно распределенной случайной величины, т. е.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \dfrac{1}{2}(x+1), & -1 \le x \le 1, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины Y определяется по формуле

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt,$$

используя которую получим:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -2, \\ \displaystyle\int_{-2}^{y}\left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right)dt, & -2 \le y \le 0, \\ \displaystyle\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right)dt + \int_{0}^{y}\left(-\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right)dt, & 0 \le y \le 2, \\ 1, & y > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < -2, \\ \dfrac{1}{8}y^2 + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}, & -2 \le y \le 0, \\ -\dfrac{1}{8}y^2 + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}, & 0 \le y \le 2, \\ 1, & y > 2. \end{cases}$$

Графики функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ показаны на рис. 4.16 и 4.17.

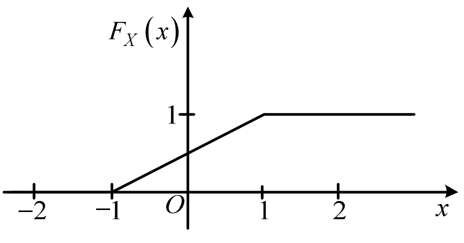

Рис. 4.16

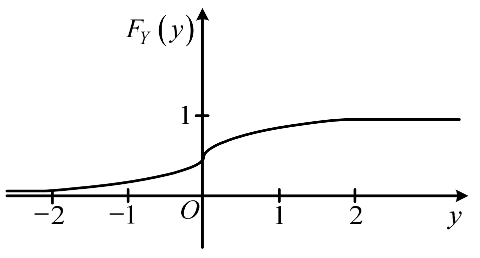

Рис. 4.17

3) Условные плотности распределения $f_X(x/Y=y)$ и $f_Y(y/X=x)$ определяются из соотношений (4.31) и (4.32):

$$f_X(x|Y=y) = \begin{cases} 0, & f_Y(y) = 0 \\ \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) \ne 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le -2 \\ \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}}, & -2 < y \le 0 \\ \dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}}, & 0 \le y < 2 \\ 0, & y \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le -2, \\ \dfrac{1}{y+2}, & -2 < y \le 0, \\ \dfrac{1}{-y+2}, & 0 \le y < 2, \\ 0, & y \ge 2. \end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x)=\begin{cases}0, & f_X(x)=0\\ \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)\neq 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\in[-1;1],\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases} \tag{4.42}$$

4) Найдем числовые характеристики случайного вектора.

- Математическое ожидание случайной величины X вычислим по формуле математического ожидания (см. (3.23)) равномерно распределенной случайной величины: $M[X]=\dfrac{1+(-1)}{2}=0$. Для случайной величины Y используем формулу (4.35):

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy=\int_{-2}^{0} y\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)dy+\int_{0}^{2} y\left(-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(-\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{8}{12}-1-\frac{8}{12}+1=0.$$

Следовательно, математическим ожиданием случайного вектора является нулевой числовой вектор $(0,\ 0)^T$.

- Корреляционный момент (ковариация) K_{XY} вычислим по формуле (4.38):

$$K_{XY}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y],$$

где $M[XY]$ — математическое ожидание случайной величины $X\cdot Y$.

Поскольку $M[X]=M[Y]=0$, а

$$M[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{4}\iint_D xydxdy=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} xdx\int_{x-1}^{x+1} ydy=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} xdx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-1}^{x+1}=$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1} x\left(x^2+2x+1-x^2+2x-1\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{3},$$

то $K_{XY}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y]=\dfrac{1}{3}$.

- Дисперсию случайной величины X вычислим по формуле дисперсии (см. (3.23)) равномерно распределенной случайной величины: $D[X]=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{2^2}{12}=\dfrac{1}{3}$. Для случайной величины Y используем формулу (4.36):

$$D[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy-(M[Y])^2=\int_{-2}^{0} y^2\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)dy+\int_{0}^{2} y^2\left(-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right)dy-0=$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}y^3+\frac{1}{2}y^2\right)dy+\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{4}y^3+\frac{1}{2}y^2\right)dy-0=$$

$$=\left(\frac{y^4}{16}+\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(-\frac{y^4}{16}+\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{0}^{2}=-1+\frac{8}{6}-1+\frac{8}{6}=\frac{2}{3}.$$

Тогда среднеквадратические отклонения равны: $\sigma_X=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\sigma_X=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

- Коэффициент корреляции, вычисленный по формуле (4.39), равен:

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,707.$$

- Выпишем корреляционную матрицу

$$\Sigma=\begin{pmatrix} D[X] & K_{XY}\\ K_{XY} & D[Y]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

и вычислим обобщенную дисперсию

$$|\Sigma|=\begin{vmatrix} D[X] & K_{XY}\\ K_{XY} & D[Y]\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

5) Регрессия X на Y $(m_X(y))$ определяется формулой (4.40) по найденной условной плотности $f_X(x|Y=y)$:

- $m_X(y)=0$, если $y\le -2$;

- $m_X(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x|Y=y)\,dx=\int\limits_{-1}^{y+1} x\frac{1}{y+2}dx=\frac{1}{y+2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{y+1}=$

$$=\frac{(y+1)^2-1}{2(y+2)}=\frac{y^2+2y}{2(y+2)}=\frac{y}{2}, \text{ если } -2<y\le 0;$$

- $m_X(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x|Y=y)\,dx=\int\limits_{y-1}^{1} x\frac{1}{2-y}dx=$

$$=\frac{1}{2-y}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y-1}^{1}=\frac{1-(y-1)^2}{2(2-y)}=\frac{-y^2+2y}{2(2-y)}=\frac{y}{2}, \text{ если } 0\le y<2;$$

- $m_X(y)=0$, если $y\ge 2$.

Следовательно,

$$m_X(y)=\begin{cases}0, & y\le -2,\\ \dfrac{y}{2}, & -2<y<2,\\ 0, & y\ge 2.\end{cases}$$

Линия регрессии X на Y: $x=m_X(y)$ или $x=\dfrac{y}{2}$, при $-2\le y\le 2$.

При определении регрессии (условного математического ожидания) Y на X можно использовать то, что условная плотность $f_Y(y|X=x)$ (4.42) равномерно распределена на каждом из отрезков $x-1\le y\le x+1$ при $x\in[-1,\,1]$. Поэтому, используя формулу математического ожидания (см. (3.23)), можно записать:

$$m_Y(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{(x+1)+(x-1)}{2}=x, & -1\le x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Линия регрессии Y на X: $y=m_Y(x)$ или $y=x$, при $-1\le x\le 1$. Линии регрессии показаны на рис. 4.13 жирными линиями. Поскольку линии регрессии являются прямыми, то регрессия линейная. Линии регрессии пересекаются в точке $(0;\,0)$, и это соответствует тому, что $M[X]=M[Y]=0$. Линии регрессии не параллельны координатным осям, и, соответственно, условные математические ожидания не совпадают с безусловными. Следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

Замечание

Задачи 4.17 и 4.18 предлагается решить самостоятельно.

Задача 4.17. Двумерный случайный вектор задан плотностью распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}C, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<1\right\}$. Найти: 1) параметр C; 2) плотности распределения случайных величин X и Y; 3) условные плотности $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$; 4) числовые характеристики случайного вектора; 5) функции регрессии Y на X и X на Y. Выяснить, являются ли независимыми случайные величины X и Y.

Задача 4.18. Двумерный случайный вектор задан плотностью распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}Cxy, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область $D=\{(x, y)\in R^2 : x+y<1, x\geq 0, y\geq 0\}$. Найти: 1) параметр C; 2) плотности распределения случайных величин X и Y; 3) условные плотности $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$; 4) числовые характеристики случайного вектора; 5) функции регрессии Y на X и X на Y. Выяснить, являются ли независимыми случайные величины X и Y.

4.5. Задания для типовых расчетов

Задание 4.1. Задан закон распределения двумерного дискретного случайного вектора $\{X, Y\}$. Найти: 1) маргинальные законы распределения его компонент X и Y; 2) функции распределения случайных величин X и Y; 3) функцию их совместного распределения; 4) условные законы распределения случайной величины X при условии $Y=y_j$ и условные законы распределения случайной величины Y при условии $X=x_i$, $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$; 5) числовые характеристики случайных величин X и Y; 6) функции регрессии Y на X и X на Y. Построить линии регрессии. Выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Вариант 1

X \ Y	–1,3	0,5	1,5	2,5
–1	0,05	0,02	0,1	0,08
1	0,15	0,25	0,06	0,04
2	0,1	0,05	0,02	0,08

Вариант 2

X \ Y	–2	–1	0	1
0,5	0,13	0,01	0,2	0,09
1,5	0,06	0,05	0,1	0,1
2,5	0,04	0,02	0,05	0,15

Вариант 3

X \ Y	–1	1	2	3
0	0,2	0,1	0,04	0,06
1	0,1	0,04	0,01	0,05
3	0,2	0,1	0,02	0,08

Вариант 4

X \ Y	1	2	3
–2	0,1	0,1	0,12
2	0,05	0,25	0,08
4	0,05	0,15	0,1

Вариант 5

X \ Y	1	2	3	4
0	0,1	0,02	0,05	0,04
1	0,15	0,15	0,06	0,04
2	0,1	0,2	0,05	0,04

Вариант 6

X \ Y	–2	1	3	4
0	0,05	0,01	0,12	0,09
2	0,1	0,12	0,1	0,2
3	0,05	0,03	0,08	0,05

Вариант 7

X \ Y	**1**	**1,5**	**2**
0,5	0,2	0,1	0,05
1	0,3	0,04	0,06
1,5	0,1	0,1	0,05

Вариант 8

X \ Y	**0**	**1**	**2**
–3	0,15	0,1	0,1
–2	0,2	0,05	0,15
0	0,05	0,1	0,1

Вариант 9

X \ Y	**1**	**2**	**3**	**4**
–1	0,2	0,02	0,08	0,08
0	0,05	0,25	0,06	0,04
2	0,05	0,1	0,02	0,05

Вариант 10

X \ Y	**–2**	**0**	**1**	**3**
–2	0,1	0,01	0,1	0,09
0	0,1	0,15	0,1	0,15
2	0,05	0,05	0,05	0,05

Вариант 11

X \ Y	**1,3**	**2,5**	**3,2**
0,5	0,2	0,1	0,05
1,5	0,3	0,04	0,06
2,5	0,1	0,1	0,05

Вариант 12

X \ Y	**0**	**1**	**2**	**2,5**
0,5	0,1	0,02	0,1	0,08
1,5	0,15	0,05	0,06	0,04
2	0,1	0,12	0,08	0,1

Вариант 13

X \ Y	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**
–1	0,06	0,01	0,13	0,09
0	0,1	0,1	0,1	0,1
1	0,09	0,05	0,07	0,1

Вариант 14

X \ Y	**1,5**	**2,5**	**3**
0,5	0,2	0,2	0,1
1,5	0,15	0,04	0,06
2	0,1	0,1	0,05

Вариант 15

X \ Y	**0**	**1**	**2**
–2	0,05	0,1	0,15
–1	0,05	0,13	0,02
0	0,05	0,15	0,05
3	0,05	0,12	0,08

Вариант 16

X \ Y	**–1**	**1**	**2**
–2	0,05	0,03	0,02
0	0,18	0,15	0,05
1	0,1	0,13	0,1
2	0,02	0,07	0,1

Вариант 17

Y \ X	**1**	**2**	**3**
0	0,1	0,3	0,18
1	0,16	0,1	0,06
2	0,04	0,04	0,02

Вариант 18

Y \ X	**–1**	**0**	**2**
2	0,18	0,1	0,12
2,5	0,05	0,15	0,05
3	0,2	0,1	0,05

Вариант 19

Y \ X	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0,1	0,1	0,1	0,05
1	0,1	0,15	0,05	0,1
2	0,02	0,08	0,07	0,08

Вариант 20

Y \ X	**–2**	**–1**	**0**	**1**
–1	0,08	0,05	0,13	0,05
0	0,1	0,03	0,1	0,1
1	0,07	0,12	0,07	0,1

Вариант 21

Y \ X	**0,5**	**1**	**1,5**
0,5	0,2	0,15	0,1
1,5	0,15	0,1	0,04
2,2	0,15	0,05	0,06

Вариант 22

Y \ X	**1**	**2**
–3	0,18	0,1
–2	0,2	0,05
–1	0,12	0,1
0	0,1	0,15

Вариант 23

Y \ X	**0**	**1**	**2**	**3**
–2	0,1	0,08	0,1	0,1
0	0,1	0,05	0,06	0,04
2	0,05	0,1	0,12	0,1

Вариант 24

Y \ X	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,1	0,03	0,1	0,1
2	0,1	0,15	0,05	0,15
3	0,05	0,07	0,05	0,05

Вариант 25

Y \ X	**1,3**	**1,5**	**2,2**
–0,5	0,25	0,1	0,1
0,5	0,1	0,05	0,03
1,5	0,2	0,1	0,07

Вариант 26

Y \ X	**–1**	**0**	**1**
–2	0,15	0,1	0,15
–1	0,1	0,12	0,08
0	0,15	0,1	0,05

Вариант 27

Y / X	**0**	**1**	**2**	**3**
–2	0,1	0,2	0,05	0,03
1	0,05	0,05	0,06	0,04
2	0,15	0,05	0,15	0,07

Вариант 28

Y / X	**1**	**2**	**3**	**4**
–1	0,15	0,08	0,1	0,1
0	0,05	0,15	0,04	0,12
1	0,05	0,02	0,06	0,08

Вариант 29

Y / X	**1,3**	**1,5**	**2,2**
0	0,1	0,2	0,05
1	0,1	0,05	0,14
2	0,2	0,06	0,1

Вариант 30

Y / X	**–1**	**0**	**1**
–2	0,1	0,1	0,15
–1	0,1	0,12	0,08
0	0,15	0,1	0,1

Задание 4.2. Двумерный непрерывный случайный вектор распределен равномерно в области D, т. е. плотность распределения случайного вектора имеет вид:

$$f(x,y)=\begin{cases} C, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти: 1) параметр C; 2) плотности распределения компонент случайного вектора X и Y; 3) функции распределения компонент случайного вектора X и Y; 4) условные плотности $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$; 5) числовые характеристики случайного вектора; 6) функции регрессии (условные математические ожидания) Y на X и X на Y. Построить линии регрессии. Выяснить, являются ли независимыми компоненты случайного вектора X и Y.

Варианты задания

1. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 4\right\}$.
2. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 9\right\}$.
3. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 16\right\}$.
4. $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 4\}$.
5. $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 1\}$.
6. $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 4\}$.
7. $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 2\}$.
8. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y\ge 0,\ y\le x\}$.
9. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y\le 1,\ y\ge x\}$.
10. $D=\{(x,y): x\le 1,\ y\le 1,\ x+y\ge 1\}$.
11. $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\le 2-x,\ y\ge x\}$.
12. $D=\{(x,y): y\ge 0,\ y\le 2-x,\ y\le x\}$.
13. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0,\ x\ge 0\right\}$.
14. $D=\{(x,y): -1\le x\le 0,\ 0\le y\le -x\}$.
15. $D=\{(x,y): x\ge -2,\ x\le y\le 0\}$.
16. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ x\le y\le x+1\}$.
17. $D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ y\le x\le y+1\}$.
18. $D=\{(x,y): y\ge 0,\ y-1\le x\le 1-y\}$.

19. $D=\{(x,y): y\ge 0,\ y-2\le x\le 2-y\}$.
20. $D=\{(x,y): y\ge -x,\ y\ge x,\ y\le 1\}$.
21. $D=\{(x,y): y\ge x,\ y\ge -x,\ y\le 2\}$.
22. $D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ y-1\le x\le 1\}$.
23. $D=\{(x,y): 0\le y\le 1, -1\le x\le 1-y\}$.
24. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 0\}$.
25. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}$.
26. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\right\}$.
27. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0,\ x\ge 0\right\}$.
28. $D=\{(x,y): 0\le y\le x+1,\ x\le 0\}$.
29. $D=\{(x,y):\ x\le 0,\ 0\le y\le x+4\}$.
30. $D=\{(x,y): 0\le x\le 1, -x\le y\le 1-x\}$.

Задание 4.3. Задана $f(x,y)$ — плотность совместного распределения случайных величин X и Y. Найти: 1) параметр C; 2) плотности и функции распределения случайных величин X и Y; 3) условные плотности $f(x|Y=y)$ и $f(y|X=x)$; 4) математические ожидания и условные математические ожидания. Построить линии регрессии. Выяснить, являются ли независимыми компоненты случайного вектора X и Y.

Варианты задания

1. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$.

2. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y^2, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\{(x,y): |x|+|y|\le 1,\ y\ge 0\}$.

3. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\{(x,y): x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

4. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ C(1-x)y, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\{(x,y): 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$.

5. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ \ y\ge 0\right\}$.

6. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy^2, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0\right\}$.

7. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\{(x,y): x\le y\le 1,\ 0\le x\le 1\}$.

8. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ \ y\le 0,\ x\le 0\right\}$.

9. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $\quad D=\{(x,y): -x+y\le 1,\ x\le 0,\ y\ge 0\}$.

10. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y^2, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

11. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy^2, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x-y\le 1, x\ge 0, y\le 0\}$.

12. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ C|x|y, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): y\le x+1, y\le 1-x, y\ge 0\}$.

13. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx|y|, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x-1\le y\le 1-x, x\ge 0\}$.

14. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2(1-y), & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): y\le x+1, y\le 1-x, y\ge 0\}$.

15. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ C(1-x)y^2, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x-1\le y\le 1-x, x\ge 0\}$.

16. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y^2, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

17. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx(x+y), & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): 0\le x\le y\le 1\}$.

18. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cy(x+y), & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): 0\le y\le x\le 1\}$.

19. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 2, y\ge 0\}$.

20. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ C(x+y), & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0,\ x+y\le 1\}$.

21. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ C(x+y), & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0,\ x+y\le 4\}$.

22. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y^2, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$.

23. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y^2, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

24. $f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y^2, & (x,y)\in D, \end{cases}$ $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 1, y\ge 0\}$.

25. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y^2, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 2,\ y\ge 0\}$.

26. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 9,\ x\le 0,\ y\le 0\right\}$.

27. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy^2, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $D=\{(x,y):x\ge 0,\ x-1\le y\le 0\}$.

28. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cx^2y, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $D=\{(x,y):y\ge 0,\ y-1\le x\le 0\}$.

29. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 4,\ x\le 0,\ y\le 0\right\}$.

30. $f(x,y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y)\notin D, \\ Cxy, & (x,y)\in D, \end{array}\right.$ $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 16,\ x\le 0,\ y\le 0\right\}$.

ГЛАВА 5

Функции случайных величин

При решении многих прикладных задач часто требуется рассматривать неслучайные функции одной или нескольких случайных величин (случайных аргументов). Такие функции также являются случайными величинами. Чтобы определять их законы распределения, надо знать не только функциональную зависимость, но и законы распределения случайных аргументов.

5.1. Функции одного случайного аргумента

Пусть на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ задана случайная величина $X(\omega)$ и φ — некоторая числовая функция. Рассмотрим новую случайную величину $Z(\omega)$ как композицию функций X и φ, образованную по правилу $Z(\omega) = \varphi(X(\omega))$. Случайная величина $Z(\omega)$ называется *функцией* φ *случайной величины* $X(\omega)$ или *функцией* φ *одного случайного аргумента* X.

Замечание

В дальнейшем для случайных величин X и Z мы будем использовать обозначение $Z = \varphi(X)$, опуская их зависимость от ω.

Если случайная величина X — дискретная, то случайная величина $Z = \varphi(X)$ также является дискретной. Функцию φ мы будем предполагать непрерывной.

Случайная величина $Z = \varphi(X)$ является непрерывной, если X — непрерывная случайная величина. В этом случае мы будем предполагать, что функция φ еще и дифференцируема.

Если Z — дискретная случайная величина, то закон ее распределения может быть задан рядом распределения, если известен ряд распределения дискретного случайного аргумента X.

Если случайная величина Z — непрерывная, то ее закон распределения задается функцией распределения $F_Z(z)$ или плотностью распределения $f_Z(z)$. Функции $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$, как будет показано в дальнейшем, можно найти, если известен закон распределения случайной величины X, т. е. если известна $F_X(x)$ — функция распределения или $f_X(x)$ — плотность распределения случайной величины X.

Замечание

В дальнейшем обозначение функции распределения и плотности распределения мы всегда будем снабжать индексами X или Z, в зависимости от того, закон какой переменной задает соответствующая функция.

Функции дискретного случайного аргумента

Если случайная величина X — дискретная и известен ее закон распределения в виде ряда распределения, то можно составить ряд распределения дискретной случайной величины $Z=\varphi(X)$, поставив в соответствие каждому значению $z_k=\varphi(x_k)$ вероятность, равную сумме вероятностей тех значений случайной величины X, которые преобразовались функцией φ в данное значение, т. е.

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{i:\,\varphi(x_i)=z_k} P\{X=x_i\} \qquad (5.1)$$

для всех возможных значений z_k.

Задача 5.1. Случайная величина X принимает все целые значения от 0 до 9 с равными вероятностями, т. е.

$$P\{X=k\}=\frac{1}{10},\ \ k=0,1,2,...,9.$$

Составить ряд распределения случайной величины $Z=(X-5)^2$.

Решение. Поскольку случайная величина X принимает значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то случайная величина Z может принимать значения: 0, 1, 4, 9, 16, 25. Вычислим вероятности, с которыми принимаются эти значения, учитывая формулу (5.1):

$$P\{Z=0\}=P\{X=5\}=\frac{1}{10}=0{,}1,$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=4\}+P\{X=6\}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0{,}2$$

$$P\{Z=4\}=P\{X=3\}+P\{X=7\}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0{,}2,$$

$$P\{Z=9\}=P\{X=2\}+P\{X=8\}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0{,}2,$$

$$P\{Z=16\}=P\{X=1\}+P\{X=9\}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0{,}2,$$

$$P\{Z=25\}=P\{X=0\}=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

Ряд распределения случайной величины Z представлен в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Z	0	1	4	9	16	25
P	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

Функцией распределения $F_Z(z)$ новой случайной величины $Z = \varphi(X)$ называется числовая функция $F_Z(z)$, для которой при любом значении $z \in R$ справедливо равенство

$$F_Z(z) = P(Z < z) \ . \tag{5.2}$$

Для функции распределения $F_Z(z)$ выполняются все свойства функции распределения случайной величины, указанные в *разд. 3.1*. Если составлен ряд распределения дискретной случайной величины Z, то ее функция распределения и все основные числовые характеристики находятся по общим для всех дискретных случайных величин правилам.

В частности, математическое ожидание и дисперсия случайной функции $Z = \varphi(X)$ определяются формулами:

$$M[Z] = \sum_k z_k P\{Z = z_k\} = \sum_i \varphi(x_i) P\{X = x_i\}, \tag{5.3}$$

$$D[Z] = \sum_k z_k^2 P\{Z = z_k\} - (M[Z])^2 = \sum_i \varphi^2(x_i) P\{X = x_i\} - (M[Z])^2, \tag{5.4}$$

в которых суммирование идет по всем возможным значениям индексов k и i.

При этом следует учитывать, что в формулах (5.3) и (5.4) суммирование может проводиться и по бесконечному числу значений индексов. В этом случае соответствующие ряды должны быть абсолютно сходящимися, иначе математическое ожидание и дисперсии не определены.

Для математического ожидания и дисперсии случайной функции $Z = \varphi(X)$ выполняются все свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины, которые приведены в *разд. 3.2*.

Задача 5.2. По ряду распределения для случайной функции $Z = (X-5)^2$, полученному в задаче 5.1 (см. табл. 5.1), построить функцию распределения и вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. 1) Учитывая соотношения (3.3), функцию распределения случайной величины $Z = (X-5)^2$ можно представить в виде:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 0{,}1, & 0 < z \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < z \le 4, \\ 0{,}5, & 4 < z \le 9, \\ 0{,}7, & 9 < z \le 16, \\ 0{,}9, & 16 < z \le 25, \\ 1, & z > 25. \end{cases}$$

График функции распределения показан на рис. 5.1.

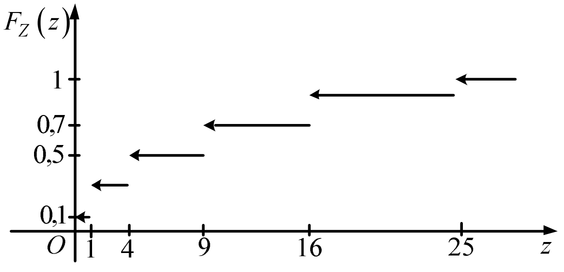

Рис. 5.1

2) Вычислим числовые характеристики по формулам (5.3) и (5.4):

$$M[Z] = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}1 = 8{,}5 .$$

$$D[Z] = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}2 + 81 \cdot 0{,}2 + 256 \cdot 0{,}2 + 625 \cdot 0{,}1 - 8{,}5^2 = 61{,}05 .$$

Замечание

Если известны математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, то математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = \varphi(X)$ можно вычислять, используя их свойства.

Задача 5.3

Известны $M[X] = 2{,}1$ и $D[X] = 0{,}49$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 3X + 2$.

Решение. $M[Z] = M[3X + 2] = 3 \cdot M[X] + 2 = 3 \cdot 2{,}1 + 2 = 8{,}3$.

$$D[Z] = D[3X + 2] = 9 \cdot D[X] + 0 = 9 \cdot 0{,}49 = 4{,}41 .$$

Замечание

Задачи 5.4 и 5.5 предлагается решить самостоятельно.

Задача 5.4. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X^2$, если ряд распределения случайной величины X задан табл. 5.2.

Таблица 5.2

X	–2	–1	0	1	2
P	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3

Таблица 5.3

X	–2	–1	0	1	2	3
P	0,15	0,1	0,1	0,15	0,3	0,2

Задача 5.5. Найдите вероятность того, что $Z \ge 3$, если $Z = X^2 - 1$ и если ряд распределения случайной величины X задан табл. 5.3.

Функции непрерывного случайного аргумента

Пусть X — непрерывная случайная величина и функция φ непрерывна и дифференцируема. Тогда случайная величина $Z = \varphi(X)$ будет непрерывной, закон ее распределения может быть задан функцией распределения $F_Z(z)$ или плотностью распределения $f_Z(z)$. При этом $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$ определяются через заданные функцию распределения $F_X(x)$ и плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X.

Теорема 5.1. Если заданы функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X и монотонная, непрерывная и дифференцируемая функция $\varphi(X)$ случайной величины X и если функция $X = \psi(Z) = \varphi^{-1}(Z)$ — обратная к функции $Z = \varphi(X)$, то функция распределения $F_Z(z)$ новой случайной величины $Z = \varphi(X)$ определяется из соотношения

$$F_Z(z) = F_X(\psi(z)) = F_X\left(\varphi^{-1}(z)\right), \tag{5.5}$$

если функция φ строго возрастает, и из соотношения

$$F_Z(z) = 1 - F_X(\psi(z)) = 1 - F_X\left(\varphi^{-1}(z)\right), \tag{5.6}$$

если функция φ строго убывает (рис. 5.2 и 5.3 соответственно).

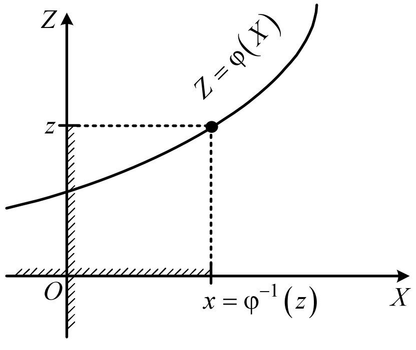

Рис. 5.2

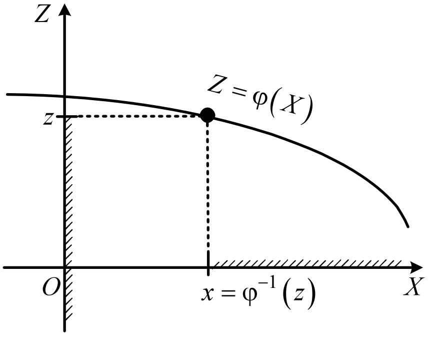

Рис. 5.3

Задача 5.6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины Z, если: 1) $Z=1-2X$; 2) $Z=X^2$.

Решение. 1) Функция $Z=1-2X$ является убывающей. Поэтому для функции распределения случайной величины Z используем соотношение (5.6). Решая уравнение $Z=1-2X$ относительно X, получим обратную функцию

$$X=\psi(z)=\varphi^{-1}(Z)=\frac{1-Z}{2}.$$

Учитывая, что условию $x\ge 0$ соответствует условие $z\le 1$, получим соотношения для функции распределения случайной величины Z:

$$F_Z(z)=1-F_X\left(\varphi^{-1}(z)\right)=\begin{cases}1-1+e^{-\frac{1-z}{2}}, & z\le 1\\ 1-0, & z>1\end{cases}=\begin{cases}e^{-\frac{1-z}{2}}, & z\le 1,\\ 1, & z>1.\end{cases}$$

2) Функция $Z=X^2$ не является монотонной. Поэтому для того, чтобы найти выражение для функции распределения $F_Z(z)$, используем ее определение, а также ее четвертое свойство *(см. разд. 3.1)*.

Учитывая, что случайная величина Z может принимать только неотрицательные значения, и выбирая вследствие этого только $z\ge 0$, получим:

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z<z)=P\left\{X^2<z\right\}=P\left\{|X|<\sqrt{z}\right\}=\\&=P\left\{-\sqrt{z}<X<\sqrt{z}\right\}=F_X\left(\sqrt{z}\right)-F_X\left(-\sqrt{z}\right).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Поскольку при $x=-\sqrt{z}<0$ $F_X(x)=0$, то

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\sqrt{z}}, & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

Плотность распределения непрерывной случайной величины $Z=\varphi(X)$ определяется как производная от ее функции распределения, вычисленная по правилу дифференцирования сложной функции.

Из теоремы 5.1 следует: если $F_Z(z)$ — функция распределения случайной величины Z, а функция $X=\psi(Z)=\varphi^{-1}(Z)$ — обратная к функции $Z=\varphi(X)$, то

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=F_X'(\psi(z))\cdot\psi'(z)=f_X(\psi(z))\cdot\psi'(z),\tag{5.8}$$

если функция φ возрастающая;

$$f_Z(z)=\left(1-F_X(\psi(z))\right)'_z=-F_X'(\psi(z))\cdot\psi'(z)=-f_X(\psi(z))\cdot\psi'(z),\tag{5.9}$$

если функция φ убывающая.

Замечание

Поскольку плотность $\psi'(z)\ge 0$ для возрастающей функции φ и $\psi'(z)\le 0$ для убывающей, то формулы (5.8) и (5.9) можно объединить.

$$f_Z(z)=f_X(\psi(z))\cdot|\psi'(z)|\,. \tag{5.10}$$

Задача 5.7. Плотность распределения случайной величины X равна $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z=3-2X$.

Решение. Поскольку для функции $Z=\varphi(X)=3-2X$ обратной является функция $X=\dfrac{3-Z}{2}$ и функция $\varphi(X)$ — убывающая, то по формуле (5.9) получим:

$$f_Z(z)=-f_X\left(\frac{3-z}{2}\right)\left(\frac{3-z}{2}\right)'=-f_X\left(\frac{3-z}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{3-z}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{4+(3-z)^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4+(3-z)^2}\,.$$

Задача 5.8. Случайная величина распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Получить формулу для плотности распределения случайной величины $Z=X^2$.

Решение. 1) Пусть $z\ge 0$. Используя полученное соотношение (5.7) в задаче 5.6, а также то, что для функции $Z=X^2$ обратная функция $X=\varphi^{-1}(Z)=\psi(Z)=\pm\sqrt{Z}$, получим плотность распределения для случайной величины Z, дифференцируя ее функцию распределения $F_Z(z)$ как сложную функцию:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=F_X'\left(\sqrt{z}\right)\frac{1}{2\sqrt{z}}+F_X'\left(-\sqrt{z}\right)\frac{1}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\left(f_X\left(\sqrt{z}\right)+f_X\left(-\sqrt{z}\right)\right).$$

2) При $z<0$, $F_Z(z)=0$ и, следовательно, $f_Z(z)=0$. Поэтому

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\left(f_X\left(\sqrt{z}\right)+f_X\left(-\sqrt{z}\right)\right), & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

Поскольку $f_X\left(\sqrt{z}\right)=f_X\left(-\sqrt{z}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z/2}$, то

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^{-z/2}, & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

Замечание

Задачи 5.9—5.11 предлагается решить самостоятельно.

Задача 5.9. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + 2$, если непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \ x \in [0; 2], \\ 0, \ x \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Задача 5.10. Найти функцию распределения случайной величины $Z = 2 - X$, если функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Задача 5.11. Найти функцию распределения случайной величины $Z = 2X - 1$, если непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \ x \ge 0, \\ 0, \ x < 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики непрерывной функции одной случайной величины

Если X — непрерывная случайная величина и $f_X(x)$ — ее плотность распределения, то числовые характеристики случайной величины $Z = \varphi(X)$ определяются формулами

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx, \tag{5.11}$$

$$D[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M[Z])^2 f(x) dx, \tag{5.12}$$

или

$$D[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - (M[Z])^2. \tag{5.13}$$

В формулах (5.11)—(5.13) несобственные интегралы предполагаются абсолютно сходящимися, иначе соответствующие числовые характеристики не определены.

Задача 5.12. Плотность равномерно распределенной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайных величин: $Y = 3X$ и $Z = \sin X$.

Решение. 1) Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a,\ b] = [0,\ \pi]$. Поэтому ее математическое ожидание и дисперсию можно найти по формулам (3.23):

$$M[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2},\ D[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Тогда математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y можно вычислить, используя свойства математического ожидания, которые даны в *разд. 3.2*:

$$M[Y] = M[3X] = 3M[X] = \frac{3\pi}{2},\ D[Y] == D[3X] = 9D[X] = 9 \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{3\pi^2}{4}.$$

2) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z вычислим, используя формулы (5.11) и (5.13):

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

$$D[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - (M[Z])^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{4}{\pi^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx - \frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}.$$

Замечание

Задачи 5.13 и 5.14 предлагается решить самостоятельно.

Задача 5.13. Случайная величина X распределена равномерно на промежутке $[0;1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X + 5$?

Задача 5.14. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 3$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 3X + 1$.

5.2. Функции двух случайных величин

Если X и Y — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве, а $\varphi(x,\ y)$ — функция двух переменных, то новая случайная величина Z, определенная соотношением $Z = \varphi(X, Y)$, называется *функцией двух случайных величин* X и Y или *функцией двумерного случайного вектора* $(X,\ Y)^T$.

Случайная величина Z может быть при этом дискретной или непрерывной, в зависимости от того, дискретными или непрерывными являются случайные величины

X и Y. В данной книге мы рассмотрим только линейную функцию двух случайных величин вида $Z = aX + bY$, наиболее часто встречающуюся на практике.

Задача 5.15. Заданы законы распределения дискретных случайных величин X и Y (табл. 5.4 и 5.5). Составить закон распределения случайной величины $Z = 2X - Y$.

Таблица 5.4

X	–1	0	Σ
P	0,6	0,4	1

Таблица 5.5

Y	1	2	Σ
P	0,5	0,5	1

Решение. Случайная величина Z может принимать значения –4; –3; –2; –1. Вычислим вероятности, с которыми она принимает эти значения:

$$P\{Z=-4\} = P\{X=-1, Y=2\} = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3,$$

$$P\{Z=-3\} = P\{X=-1, Y=1\} = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3,$$

$$P\{Z=-2\} = P\{X=0, Y=2\} = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2,$$

$$P\{Z=-1\} = P\{X=0, Y=1\} = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2.$$

Закон распределения случайной величины Z дан в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Z	–4	–3	–2	–1	Σ
P	0,3	0,3	0,2	0,2	1

Замечание

Если получен закон распределения случайной величины Z, то можно найти ее функцию распределения и числовые характеристики.

Задача 5.16. Задана $f(x, y)$ — плотность совместного распределения случайных величин X и Y. Найти выражения для функции распределения и плотности распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Функция распределения случайной величины Z определяется соотношениями:

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint_D f(x, y)\,dxdy, \tag{5.14}$$

где D — область, показанная на рис. 5.4.

Учитывая, что область D задана неравенствами

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y \le z - x, \end{cases}$$

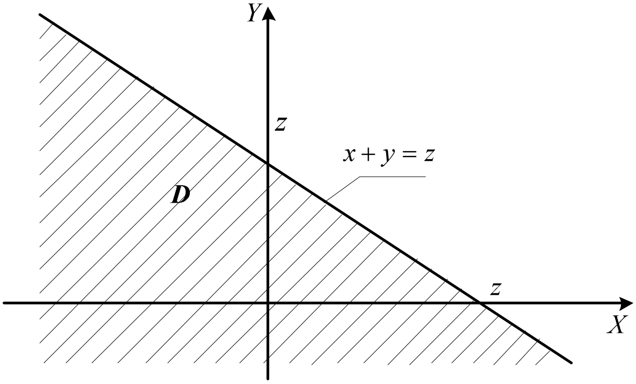

Рис. 5.4

(5.14) можно записать в виде:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,dy\,. \tag{5.15}$$

Поскольку $f_Z(z) = (F_Z(z))'$, то, дифференцируя внутренний интеграл по z как интеграл с переменным верхним пределом, получим формулу для плотности распределения:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,dy \right)'_z = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx\,. \tag{5.16}$$

Если случайные величины X и Y независимы, то $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ и поэтому интеграл в (5.16) принимает вид:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx \tag{5.17}$$

и называется *сверткой плотностей* $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

Замечание

Если найдена плотность распределения случайной величины Z, то можно найти все ее числовые характеристики.

Задача 5.17. Независимые случайные величины X и Y распределены по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = \sqrt{2}$. Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Плотности нормально распределенных с параметрами $a = 0$ и $\sigma = \sqrt{2}$ случайных величин X и Y имеют вид:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \text{ и } f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}\,.$$

Плотность распределения случайной величины Z определим по формуле (5.17) через свертку этих функций:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{4}}dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2x^2-2zx+z^2}{4}}dx .$$

Полученный интеграл можно вычислить, используя известный *интеграл Пуассона:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi} .$$

Тогда:

$$f_Z(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2\left(\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{z^2}{4}\right)}{4}}dx=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{z^2}{8}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}{2}}d\left(x-\tfrac{z}{2}\right)}_{=\sqrt{2\pi}}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{z^2}{8}}\cdot\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}e^{-\frac{z^2}{8}} .$$

Поскольку $f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2^2}}$, то случайная величина Z распределена нормально с параметрами $a=0$ и $\sigma=2$.

5.3. Функции *n* случайных величин

В этом разделе кратко рассмотрены некоторые законы распределения функций от n нормальных случайных величин, которые часто используются в задачах математической статистики.

Если $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые случайные величины, образующие случайный вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)^T$, то функцией этого случайного вектора (функцией n случайных величин) называется любая их суперпозиция. В частном случае, сумма $X_1+X_2+\ldots+X_n$ или сумма квадратов $X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$ — функции n случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Замечание 1

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ распределены по какому-либо одному непрерывному закону, например нормальному, то функция (суперпозиция) этих случайных величин имеет также непрерывный закон распределения. В этом случае ее закон распределения может быть задан плотностью распределения, для которой используют обозначение $f_n(x)$, где через n обозначено так называемое *число степеней свободы.*

Числом степеней свободы функции n случайных величин называется количество ее *независимых* аргументов, т. е. тех случайных аргументов из $X_1, X_2, ..., X_n$, которые меняются независимо друг от друга.

Замечание 2

Понятие числа степеней свободы является очень важным в статистике, где о законе распределения исследуемой случайной величины судят по ее *наблюденным* (полученным в результате случайного эксперимента) значениям $x_1, x_2, ..., x_n$. При этом неизвестные параметры распределения заменяются их статистическими оценками, которые являются функциями наблюдений. Это означает, что на случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ накладываются дополнительные связи. В этом случае числом степеней свободы будет являться число $n-k$, где n — число переменных, k — число оцениваемых параметров.

Распределение χ^2

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые нормально распределенные случайные величины, для которых справедливы условия:

- математическое ожидание каждой из них равно нулю, т. е.

$$M[X_i]=0,\ i=1, ..., n;$$

- среднеквадратичное отклонение каждой из них равно единице, т. е.

$$\sigma_i=1,\ i=1, ..., n.$$

Тогда закон распределения случайной величины

$$\chi_n^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$$

называется законом χ^2 *(хи-квадрат)* с n степенями свободы.

Плотность распределения случайной величины χ_n^2 имеет вид

$$f_{\chi_n^2}(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}, & x>0, \end{cases} \tag{5.18}$$

где $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция. График плотности распределения случайной величины χ_n^2 при $n=1, 2, 3$ показан на рис. 5.5.

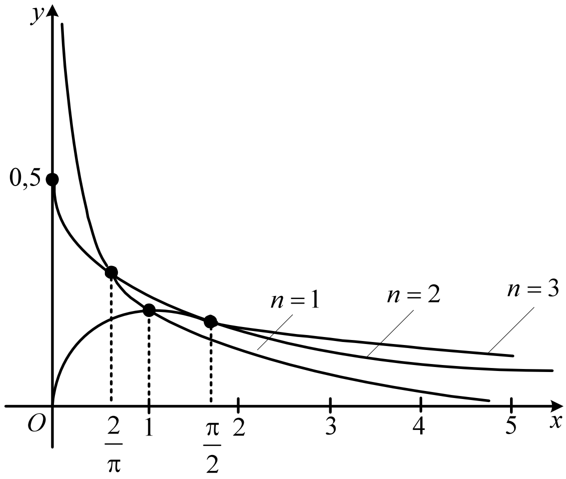

Рис. 5.5

Математическое ожидание случайной величины χ_n^2 с n степенями свободы равно числу степеней свободы, а ее дисперсия равна удвоенному числу степеней свободы, т. е.

$$M\left[\chi_n^2\right] = n\,,\; D\left[\chi_n^2\right] = 2n\,. \tag{5.19}$$

Замечание 3

Если задать вероятность β, такую, что для значений $\alpha = 1 - \beta$ справедливо равенство $P\left\{\chi_n^2 < \chi_{n,\alpha}^2\right\} = \beta$, то значения $\chi_{n,\alpha}^2$ распределения "хи-квадрат" по заданным числу степеней свободы n, вероятности β и $\alpha = 1 - \beta$ можно найти из таблицы (см. табл. П.3).

Замечание 4

При достаточно больших значениях n $(n \geq 30)$ плотность распределения случайной величины χ_n^2 можно считать приближенно равной плотности нормального закона с параметрами $\left(n, \sqrt{2n}\right)$, т. е. $f_{\chi_n^2}(x) \approx \dfrac{1}{2\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{(x-n)^2}{4n}}$.

Распределение Стьюдента

Пусть X — нормально распределенная случайная величина и $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые случайные величины, имеющие такое же распределение, как и случайная величина X. При этом параметрами нормального распределения являются:

- математическое ожидание $M\left[X_i\right] = 0$, $i = 0, 1, ..., n$;
- среднее квадратичное отклонение $\sigma_i = 1$, $i = 0, 1, ..., n$.

Тогда случайная величина

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}} = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

имеет распределение, которое называют *распределением Стьюдента* (T-распределением) с n степенями свободы.

Плотность распределения случайной величины T_n имеет вид:

$$f(x) = b_n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{5.20}$$

где $b_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}$, $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция.

Из вида плотности распределения Стьюдента ясно, что она является четной функцией. График ее показан на рис. 5.6.

Замечание 5

Если задать вероятность β, такую, что справедливо равенство $P\{|T_n| < t_{n,\beta}\} = \beta$, то значения квантиля $t_{n,\beta}$ распределения Стьюдента по заданным числу степеней свободы n и вероятности β можно найти из таблицы (см. табл. П.5).

Математическое ожидание распределения Стьюдента определено только при $n \geq 2$ и равно нулю. Дисперсия определена только при $n \geq 3$ и определяется формулой: $D[T_n] = \dfrac{n}{n-2}$. При $n \to \infty$ распределение Стьюдента приближается к нормальному распределению с параметрами $M[T_n] = 0$ и $\sqrt{D[T_n]} = \dfrac{n}{n-2}$.

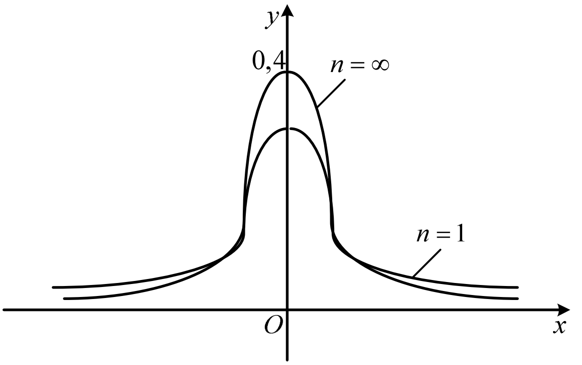

Рис. 5.6

5.4. Задания для типовых расчетов

Задание 5.1. Заданы дискретные случайные величины X и Y. Найти ряд распределения случайной величины Z и все ее числовые характеристики.

Варианты задания

1. $Z = 2X + Y$

X	–1,5	1	2,5	3
P	0,2	0,3	0,2	0,3
Y	–2	–1	1,5	2
P	0,2	0,1	0,5	0,2

2. $Z = -X + 2Y$

X	–1	0	1	2
P	0,3	0,2	0,4	0,1
Y	–1	0	1	2
P	0,2	0,2	0,2	0,4

3. $Z = -X + Y$

X	–2,4	–1,4	0	1,3
P	0,1	0	0,6	0,3
Y	–1	0	1	1,5
P	0,3	0,2	0,4	0,1

4. $Z = X + Y$

X	–3	–1	0	1
P	0,2	0,2	0,1	0,5
Y	–2	–1	0	3
P	0,1	0,6	0,1	0,2

5. $Z = X - Y$

X	–1	–0,5	0	2
P	0,3	0,15	0,15	0,4
Y	1	2	3	4
P	0,5	0,2	0,2	0,1

6. $Z = 2X + Y$

X	–1	1	1	2
P	0,2	0,2	0,4	0,2
Y	0	1	2	3
P	0,2	0,2	0,3	0,3

7. $Z = 2X - Y$

X	–1	0	1	2
P	0,2	0,4	0,1	0,3
Y	–2	–1	0	1
P	0,3	0,2	0,1	0,4

8. $Z = X + Y$

X	–2,5	–1	0	2
P	0,4	0,3	0,2	0,1
Y	–1	–0,5	0	1
P	0,4	0,2	0,3	0,1

9. $Z = -X + Y$

X	–2	–1	1	2
P	0,2	0,2	0,1	0,5
Y	–2	–1	1	3
P	0,2	0,3	0,1	0,4

10. $Z = -X + Y$

X	0	1	2	3
P	0,3	0,3	0,2	0,2
Y	–2	–1	0	1
P	0,1	0,4	0,3	0,2

11. $Z = X - Y$

X	–1	0	1	2
P	0,3	0,5	0,1	0,1
Y	0	1	3	4
P	0,5	0,3	0,1	0,1

12. $Z = X + 2Y$

X	–2	–1	0	1
P	0,2	0,5	0,1	0,2
Y	0	1	2	3
P	0,1	0,7	0,2	0

13. $Z = 2X - Y$

X	–2	–1	1	2
P	0,3	0,2	0,2	0,3
Y	0	1	2	3
P	0,4	0,2	0,2	0,2

14. $Z = X - 2Y$

X	–1	0	1	4
P	0,3	0,1	0,1	0,5
Y	1	2	3	4
P	0,2	0,1	0,5	0,2

15. $Z = X + Y$

X	–1	0	1	2
P	0,2	0,25	0,15	0,4
Y	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

16. $Z = 2X - Y$

X	–2	–1	0	1
P	0,1	0,2	0,5	0,2
Y	–1	0	1	2
P	0,2	0,4	0,2	0,2

17. $Z = X + Y$

X	1	2	3	5
P	0,5	0,3	0,1	0,1
Y	0	1	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

18. $Z = 2X - Y$

X	–1	1	2	2,5
P	0,4	0,4	0,1	0,1
Y	–1	0	1	2
P	0,2	0,5	0,1	0,2

19. $Z = -X + 2Y$

X	–3	–2	–1	0
P	0,3	0,2	0,1	0,4
Y	0	1	2	3
P	0,5	0,3	0,2	0

20. $Y = X + Y$

X	–1	0	1	4
P	0,3	0,4	0,2	0,1
Y	–1	0	1	4
P	0,3	0,4	0,2	0,1

21. $Z = 2X - Y$

X	–2	–1	0	1
P	0,3	0,2	0,4	0,1
Y	0	1	2	3
P	0,4	0,2	0,3	0,1

22. $Z = X - Y$

X	–3	–1	0	2
P	0,1	0,4	0,5	0
Y	–1	0	1	2
P	0,3	0,3	0,3	0,1

23. $Z = X + 2Y$

X	–3	–1	0	1
P	0,2	0,2	0,2	0,4
Y	–3	–1	0	1
P	0,2	0,2	0,2	0,4

24. $Z = -X + Y$

X	–1	0	1	2
P	0,3	0,2	0,1	0,4
Y	–2	–1	0	1
P	0,2	0,1	0,4	0,3

25. $Z = 2X + Y$

X	–1	0	1	2
P	0,2	0,3	0,4	0,1
Y	–1	0	1	2
P	0,2	0,3	0,4	0,1

26. $Z = X + Y$

X	–2	0	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1
Y	–1	0	1	2
P	0,1	0,4	0,5	0

27. $Z = X - Y$

X	–1	0	1	2
P	0,2	0,4	0,2	0,2
Y	0	1	2	3
P	0,5	0,2	0,3	0

28. $Z = X - 2Y$

X	–1	0	1	2
P	0,2	0,6	0,2	0
Y	0	1	2	3
P	0,4	0,2	0,2	0,2

29. $Z = X - Y$

X	0	1	2	3
P	0,5	0,3	0,2	0
Y	–2	–1	0	1
P	0,6	0,2	0,1	0,1

30. $Z = 2X - Y$

X	0	1	2	3
P	0,4	0,4	0,2	0
Y	–1	0	1	2
P	0,3	0,5	0,1	0,1

Задание 5.2. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины Y, определить все ее числовые характеристики.

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 + x, & -1 \le x < 0, \\ 1, & x \ge 0, \end{cases}$ $Y = 3X + 1$.

2. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 + x, & -1 \le x < 0, \\ 1, & x \ge 0, \end{cases}$ $Y = 2X - 3$.

3. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$ $Y = -X + 1$.

4. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1{,}5, \\ 2x - 3, & 1{,}5 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2, \end{cases}$ $Y = 3X + 1$.

5. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$ $Y = -2X + 5$.

6. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 + x, & -1 \le x < 0, \\ 1, & x \ge 0, \end{cases}$ $Y = X^2$.

7. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 2 + x, & -2 \le x < -1, \\ 1, & x \ge -1, \end{cases}$ $Y = X^2 + 1$.

8. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x - 1)^2, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2, \end{cases}$ $Y = X + 1$.

9. $F_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & x < 0, \\ 1, & x \ge 0, \end{cases}$ $Y = -X + 1$.

10. $F_X(x) = \begin{cases} e^{x} & x < 0, \\ 1, & x \ge 0, \end{cases}$ $Y = X^2$.

11. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3,\end{cases}$ $Y=X+1$.

12. $F_X(x)=\begin{cases}e^{3x} & x<0,\\ 1, & x\ge 0,\end{cases}$ $Y=-2X+1$.

13. $F_X(x)=\begin{cases}e^{5x} & x<0,\\ 1, & x\ge 0,\end{cases}$ $Y=-X+3$.

14. $F_X(x)=\begin{cases}e^{x-1} & x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$ $Y=2X+1$.

15. $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x+1}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$ $Y=-3X+2$.

16. $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x+2} & x\ge 2,\\ 0, & x<2,\end{cases}$ $Y=-3X+3$.

17. $F_X(x)=\begin{cases}e^{x-2}, & x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$ $Y=-2X+1$.

18. $F_X(x)=\begin{cases}e^{x-3}, & x<3,\\ 1, & x\ge 3,\end{cases}$ $Y=-3X+3$.

19. $F_X(x)=\begin{cases}e^{x+1}, & x<-1,\\ 1, & x\ge -1,\end{cases}$ $Y=X+2$.

20. $F_X(x)=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-2,\\ 1, & x\ge -2,\end{cases}$ $Y=-X+2$.

21. $F_X(x)=\begin{cases}e^{x-1}, & x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$ $Y=X^2$.

22. $F_X(x)=\begin{cases}e^{x+3}, & x<-3,\\ 1, & x\ge -3,\end{cases}$ $Y=-2X$.

23. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-2x}, & x\ge 0,\end{cases}$ $Y=-2X$.

24. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0,\end{cases}$ $Y=X^2$.

25. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-3x}, & x \ge 0, \end{cases} \quad Y = -2X + 2.$

26. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \quad Y = 2X.$

27. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x-1)^3, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x \ge 2, \end{cases} \quad Y = 2X + 1.$

28. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0{,}5, \\ 2x - 1, & 0{,}5 < x \le 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \quad Y = X + 1.$

29. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \quad Y = X - 1.$

30. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \sqrt{x-1}, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x \ge 2, \end{cases} \quad Y = X - 1.$

ГЛАВА 6

Выборочный метод математической статистики

Основным методом изучения случайных величин в математической статистике является выборочный метод, при котором их исследование проводится на основе опытных (полученных в результате случайного эксперимента) данных. Пусть в результате случайного эксперимента наблюдаются (измеряются) значения случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, а x_i — реализация эксперимента (в эксперименте имело место событие $\{X = x_i\}$). Если провести n экспериментов (измерений), то в результате получим n значений измеряемой случайной величины X, которые обозначаются $x_1, x_2, ..., x_n$ и образуют *выборку объема* n.

Множество всех возможных значений наблюдаемой случайной величины X, которые могут реализоваться в рамках проводимого эксперимента, называют *генеральной совокупностью*, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — *наблюдениями* или *выборочными значениями* случайной величины X.

Случайная величина X может быть дискретной или непрерывной, принимать конечное или бесконечное множество значений. Соответственно и генеральная совокупность может представлять собой конечное или бесконечное множество, дискретное или непрерывное.

Замечание 1

Выборку $x_1, x_2, ..., x_n$ можно рассматривать как результат одновременного наблюдения n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Для того чтобы на основе выборки можно было делать выводы о случайной величине X, объем выборки n должен быть достаточно большим, а условия эксперимента должны обеспечивать одинаковые условия реализации возможных значений наблюдаемой случайной величины. Такая выборка сохраняет свойства генеральной совокупности и называется *представительной (репрезентативной)*.

Замечание 2

В практических статистических расчетах будем считать выборки большими или малыми в зависимости от условий $n \geq 30$ или $n < 30$.

Если все измерения (эксперименты) проводятся в одинаковых условиях независимо друг от друга, то выборка называется *простой* или *однородной*. Иначе выборка —

сложная или *неоднородная*. В данной книге мы будем предполагать, что выборки однородные.

6.1. Первичная обработка экспериментальных данных

Первичная обработка полученных в результате случайного эксперимента данных включает в себя:

- построение статистического ряда распределения;
- построение эмпирической функции распределения;
- получение точечных статистических оценок;
- предварительное предположение о характере распределения случайной величины X.

Построение интервального статистического ряда

При статистической обработке экспериментальных данных распределение случайной величины X заменяется так называемым *выборочным распределением*, т. е. выборкой $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $P\{X = x_i\} = \dfrac{1}{n}$.

Если выборка небольшого объема, то статистический ряд распределения представляет собой дискретный ряд распределения (ряд распределения для выборочной случайной величины X^*). Если выборка большого объема, то строится так называемый *интервальный (группированный)* статистический ряд (см. табл. 6.1).

Для построения интервального ряда распределения необходимо:

1. Упорядочить выборку, т. е. составить так называемый *вариационный ряд*
$$x_1^* \le x_2^* \le x_3^* \le ... \le x_{n-1}^* \le x_n^*, \tag{6.1}$$
в котором упорядоченные значения $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ называют *порядковыми статистиками*.
2. Найти *диапазон выборки* $\left[x_1^*; x_n^*\right]$ и *размах выборки* R_B по формуле:
$$R_B = x_n^* - x_1^*. \tag{6.2}$$
3. Для заданного объема выборки n найти оптимальное число интервалов l, на которые разбивается диапазон выборки. Рекомендуется выбирать:
$$l = \begin{cases} l \le 5\lg n, & 6 \le l \le 20, \\ [\sqrt{n}], & 5 \le l \le 25, \\ [1 + 3{,}32\lg n], & 5 \le l \le 25. \end{cases} \tag{6.3}$$

4. Найти длину каждого интервала h по формуле

$$h = \frac{R_B}{l}. \tag{6.4}$$

5. После этого можно выписать полуоткрытые интервалы

$$I_1 = [a_0;\, a_1),\ \ldots,\ I_i = [a_{i-1};\, a_i),\ \ldots,\ I_l = [a_{l-1};\, a_l],$$

на которые разбит весь диапазон выборки $\left[x_1^*;\, x_n^*\right]$ и границы которых определяются формулами:

$$a_0 = x_1^*,\ a_i = a_0 + i \cdot h,\ i = 1, \ldots, l. \tag{6.5}$$

Замечание 1

Интервалы выбирают полуоткрытыми, чтобы исключить случай, когда какое-то выборочное значение попадет на границу интервала, и надо решать, к какому интервалу его отнести.

Замечание 2

В последнем интервале $I_l = [a_{l-1};\, a_l]$ должно быть $a_1 = a_0 + l \cdot h \ge x_n^*$. Поэтому его длина может оказаться больше, чем h.

Замечание 3

К этим интервалам можно добавить два интервала: $I_0 = (-\infty;\, a_0)$ и $I_{l+1} = (a_l;\, +\infty)$, если есть основания предполагать, что исследуемая случайная величина X распределена на всей числовой оси или даже положить $a_0 = -\infty$ и $a_l = +\infty$.

6. Для каждого интервала I_i, $i = 1, \ldots, l$ с помощью вариационного ряда (6.1) вычисляются числа n_i — количество выборочных значений, попавших в этот интервал. Ясно, что $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

7. Все выборочные значения, попавшие в интервал I_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, принимаются равными его середине, а середины интервалов $\tilde{x}_i$ группированного ряда вычисляются по формулам:

$$\tilde{x}_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2},\ i = 1, 2, \ldots, l. \tag{6.6}$$

8. Далее вычисляются частоты p_i^* по формулам:

$$p_i^* = \frac{n_i}{n}, \tag{6.7}$$

где n_i — число выборочных значений, попавших в интервал I_i. Ясно, что $\sum_{i=1}^{l} p_i^* = 1$.

9. После этого записывается интервальный ряд (табл. 6.1), в котором указаны интервалы, середины интервалов, количество выборочных значений в каждом интервале и частоты, вычисленные по формулам (6.7).

Таблица 6.1

$\boldsymbol{I_i}$	I_1	I_2	...	I_l	Σ
$\boldsymbol{\tilde{x}_i}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	...	$\tilde{x}_l$	–
$\boldsymbol{n_i}$	n_1	n_2	...	n_i	n
$\boldsymbol{p_i^*}$	p_1^*	p_2^*	...	p_l^*	1

Построение эмпирической функции распределения

Наряду с интервальным строится *дискретный статистический ряд* (табл. 6.2), где указываются середины интервалов, соответствующие частоты из табл. 6.1, а также так называемые *накопленные частоты* z_i, которые вычисляются по формулам:

$$z_1 = p_1^*;\; z_2 = p_1^* + p_2^*;\; ...;\; z_i = \sum_{k=1}^{i} p_k^* .$$

Таблица 6.2

$\boldsymbol{\tilde{x}_i}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	...	$\tilde{x}_l$	Σ
$\boldsymbol{p_i^*}$	p_1^*	p_2^*	p_3^*	...	p_l^*	1
$\boldsymbol{z_i}$	z_1	z_2	z_3	...	1	

Построенный дискретный статистический ряд представляет собой приближенное выборочное распределение, а частоты p_i^* являются статистическими оценками вероятностей того, что выборочное значение равно $\tilde{x}_i$.

В качестве приближения функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности в статистике рассматривают так называемую *эмпирическую функцию распределения*, которая определяется формулой:

$$F_n^*(x) = \sum_{i:\tilde{x}_i < x} p_i^* . \tag{6.8}$$

Аналитическое выражение $F_n^*(x)$ через накопленные частоты z_i имеет вид:

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & x\le\tilde{x}_1,\\ z_1, & \tilde{x}_1<x\le\tilde{x}_2,\\ z_2, & \tilde{x}_2<x\le\tilde{x}_3,\\ \dots\dots\dots & \\ z_{l-1}, & \tilde{x}_{l-1}<x\le\tilde{x}_l,\\ 1, & x>\tilde{x}_l.\end{cases} \tag{6.9}$$

Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ ставит в соответствие каждому значению x частоту события $X<x$ и представляет собой кусочно-постоянную функцию со скачками в серединах интервалов $\tilde{x}_i$ $i=1,2,\dots,l$. На рис. 6.1 дан пример ее графика при четырех интервалах статистического ряда.

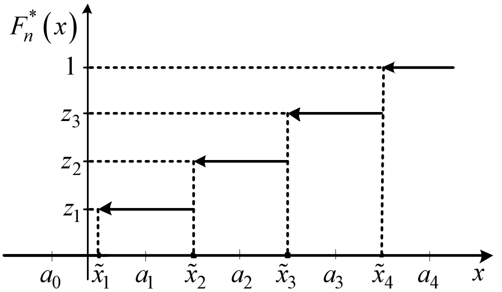

Рис. 6.1

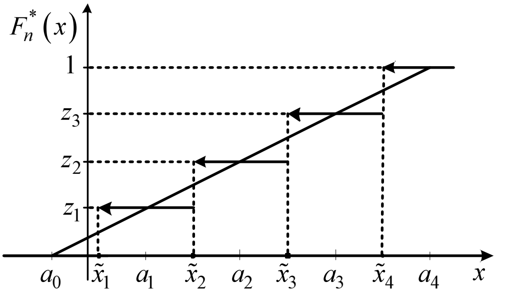

Рис. 6.2

Если X — непрерывная случайная величина, то в качестве статистического аналога функции распределения генеральной совокупности используют *кумуляту*.

Кумуляту строят как непрерывную ломаную линию, состоящую из отрезков, соединяющих точки:

$$(a_0,0)\text{ и }(a_1;z_1),\ (a_1;z_1)\text{ и }(a_2;z_2),\ (a_2;z_2)\text{ и }(a_3;z_3),\dots,\ (a_{l-1};z_{l-1})\text{ и }(a_l;z_l),$$

а также двух полупрямых: $y=0$, при $x\le a_0$ и $y=1$, при $x>a_l$. На рис. 6.2 построена кумулята для графика функции распределения, показанной на рис. 6.1.

Гистограмма и полигон

Статистическим аналогом плотности распределения непрерывной генеральной совокупности X является *гистограмма* — кусочно-постоянная функция $f_n^*(x)$, значения которой на каждом интервале $I_i=(a_{i-1};a_i)$ определяются формулой

$$f_i^*(x)=\frac{p_i^*}{h}, \tag{6.10}$$

где частота p_i^* выбирается из табл. 6.2; h — длина интервала.

Пример гистограммы для статистического ряда, содержащего четыре интервала, показан на рис. 6.3. Легко видеть, что площадь заштрихованной фигуры (площадь под гистограммой) равна единице.

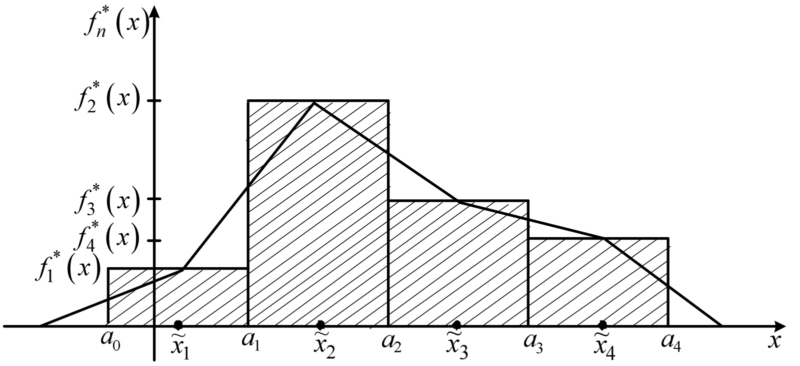

Рис. 6.3

Соединив точки гистограммы с абсциссами $\tilde{x}_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2}$ $(i = 1, 2, ..., l)$, на этом же рисунке можно построить *полигон частот.*

Замечание

По виду полигон частот больше "походит" на график плотности распределения, однако площадь под полигоном частот уже не равна единице.

По виду полигона выдвигается основная гипотеза о характере распределения генеральной совокупности X: нормальное (гауссовское) распределение, показательное (экспоненциальное) распределение, равномерное распределение и т. д. Для полигона на рис. 6.3 основной гипотезой будет, очевидно, гипотеза о нормальном законе распределения.

6.2. Получение точечных статистических оценок

Если не известны параметры распределения генеральной совокупности X, такие, например, как математическое ожидание и дисперсия, то при статистической обработке выборочных данных получают приближенные значения этих параметров, т. е. их *статистические оценки*. Статистические оценки разделяются на *точечные* статистические оценки и *интервальные*.

Точечной называется статистическая оценка, которая определяется одним числом. Основными точечными статистическими оценками являются: выборочное среднее $\overline{x}$, выборочная дисперсия s^2, выборочное среднеквадратическое отклонение (СКВО) s, выборочная медиана, выборочная асимметрия A^* и выборочный эксцесс E^*.

К точечным статистическим оценкам предъявляется ряд требований. Если θ_n^* — статистическая оценка параметра θ, то она должна удовлетворять следующим условиям:

1. Несмещенность, т. е. $M\left[\theta_n^*\right] = \theta$.
2. Состоятельность, т. е. $P\left\{\left|\theta_n^* - \theta\right| > \varepsilon\right\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ для $\forall \varepsilon > 0$.
3. Эффективность, т. е. дисперсия $D\left[\theta_n^*\right]$ — наименьшая или асимптотическая эффективность, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} D\left[\theta_n^*\right] = 0$.

Для вычисления точечных статистических оценок справедливы формулы (6.11)—(6.15), которые приведены далее.

Выборочное среднее $\overline{x}$ вычисляется по формуле

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{l} \tilde{x}_i p_i^*, \tag{6.11}$$

где $\tilde{x}_i$ — середины интервалов; p_i^* — частоты.

Выборочное среднее является несмещенной, состоятельной и асимптотически эффективной оценкой математического ожидания генеральной совокупности.

Выборочная дисперсия s^2 и *выборочное СКВО* s вычисляются по формулам

$$s^2 = \sum_{i=1}^{l} \tilde{x}_i^2 p_i^* - \overline{x}^2, \ s = \sqrt{s^2}, \tag{6.12}$$

где $\tilde{x}_i$ — середины интервалов; p_i^* — частоты; $\overline{x}$ — выборочное среднее.

Выборочная дисперсия является состоятельной, но смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности. Несмещенной оценкой дисперсии является исправленная выборочная дисперсия.

Исправленная выборочная дисперсия $\overline{s}^2$ и *исправленное выборочное СКВО* $\overline{s}$ вычисляются по формулам

$$\overline{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2, \ \overline{s} = \sqrt{\overline{s}^2}, \tag{6.13}$$

где s^2 — выборочная дисперсия; n — объем выборки.

Выборочная медиана μ^* определяется с помощью вариационного ряда (6.1) по формуле

$$\mu^* = \begin{cases} x_{k+1}^*, & n = 2k+1, \\ \dfrac{x_k^* + x_{k+1}^*}{2}, & n = 2k. \end{cases} \tag{6.14}$$

Для *выборочной асимметрии* A^* и выборочного эксцесса E^* справедливы формулы

$$A^* = \frac{1}{\overline{s}^3} \sum_{i=1}^{l} (\tilde{x}_i - \overline{x})^3 p_i^*, \ E^* = \frac{1}{\overline{s}^4} \sum_{i=1}^{l} (\tilde{x}_i - \overline{x})^4 p_i^* - 3, \quad (6.15)$$

где $\tilde{x}_i$ — середины интервалов; $\overline{s}$ — исправленное выборочное СКВО; p_i^* — частоты; $\overline{x}$ — выборочное среднее.

Асимметрия и эксцесс являются характеристиками формы кривой распределения. Если $A^* = 0$, то распределение имеет симметричную форму. Эксцесс является показателем "крутости" полигона по сравнению с нормальным распределением.

Если выборочные асимметрия и эксцесс близки к нулю, то можно выдвигать гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности. Можно даже указать интервалы для СКВО этих выборочных характеристик, при попадании в которые они "не существенно" отклоняются от соответствующих характеристик нормального распределения.

Для асимметрии:

$$(-2\sigma_A; 2\sigma_A), \text{ где } \sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}, \quad (6.16)$$

и для эксцесса:

$$(-2\sigma_E; 2\sigma_E), \text{ где } \sigma_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}, \quad (6.17)$$

где n — объем выборки.

6.3. Пример выполнения лабораторной работы "Первичная обработка экспериментальных данных"

По извлеченной случайной выборке $0,70$; $-0,28$; $1,24$; $2,28$; $2,20$; $2,73$; $-1,18$; $0,77$; $2,10$; $-0,09$; $0,31$; $-0,69$; $-0,85$; $0,02$; $0,23$; $-1,12$; $0,43$; $0,60$; $1,13$; $0,63$; $0,67$; $0,63$; $2,34$; $0,91$; $0,81$; $0,49$; $2,97$; $1,66$; $3,38$; $0,35$; $2,66$; $-0,61$; $1,54$; $1,90$; $1,72$; $0,92$; $0,48$; $1,68$; $0,62$; $1,76$; $0,44$; $0,15$; $0,52$; $0,64$; $0,97$; $1,03$; $0,68$; $3,10$; $-0,74$; $0,26$ генеральной непрерывной совокупности X:

1) составить интервальный ряд распределения;

2) построить эмпирическую функцию распределения, ее график и кумуляту;

3) построить гистограмму и полигон;

4) получить точечные статистические оценки параметров распределения;

5) построить теоретическую кривую и выдвинуть гипотезу о законе распределения.

Построение интервального статистического ряда

1) Упорядочим выборку, т. е. составим вариационный ряд: $-1,18$; $-1,12$; $-0,85$; $-0,74$; $-0,69$; $-0,61$; $-0,28$; $-0,09$; $0,02$; $0,15$; $0,23$; $0,26$; $0,31$; $0,35$; $0,43$; $0,44$; $0,48$; $0,49$; $0,52$; $0,60$; $0,62$; $0,63$; $0,63$; $0,64$; $0,67$; $0,68$; $0,70$; $0,77$; $0,81$; $0,91$; $0,92$; $0,97$; $1,03$; $1,13$; $1,24$; $1,54$; $1,66$; $1,68$; $1,72$; $1,76$; $1,90$; $2,10$; $2,20$; $2,28$; $2,34$; $2,66$; $2,73$; $2,97$; $3,10$; $3,38$.

2) $x_{\min} = -1,18$; $x_{\max} = 3,38$. Объем выборки $n = 50$.

3) Диапазон выборки $[-1,18; 3,38]$.

4) Размах выборки $R_B = 3,38 + 1,18 = 4,56$.

5) Количество интервалов, вычисленное по формуле (6.3), $l = [1 + 3,32 \cdot \lg 50] = 6$.

6) Длина интервала, вычисленная по формуле (6.4), $h = \dfrac{4,56}{6} = 0,76$.

7) Границы интервалов статистического ряда (6.5):

$$a_0 = -1,18,\ a_1 = -0,42,\ a_2 = 0,34,\ a_3 = 1,10,\ a_4 = 1,86,\ a_5 = 2,62,\ a_6 = 3,38.$$

8) Интервалы:

$$I_0 = (-\infty; -1,18),\ I_1 = [-1,18; -0,42);\ I_2 = [-0,42; 0,34);\ I_3 = [0,34; 1,10);$$
$$I_4 = [1,10; 1,86),\ I_5 = [1,86; 2,62),\ I_6 = [2,62; 3,38].$$

9) Число выборочных значений, попавших в каждый интервал:

$$n_1 = 6,\ n_2 = 7,\ n_3 = 20,\ n_4 = 7,\ n_5 = 5,\ n_6 = 5.$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{6} n_i = 6 + 7 + 20 + 7 + 5 + 5 = 50$.

10) Частоты интервального ряда, вычисленные по формуле (6.7):

$$p_1^* = \frac{6}{50} = 0,12,\ p_2^* = \frac{7}{50} = 0,14,\ p_3^* = \frac{20}{50} = 0,40,\ p_4^* = \frac{7}{50} = 0,14,$$
$$p_5^* = \frac{5}{50} = 0,10,\ p_6^* = \frac{5}{50} = 0,10.$$

Контроль: $0,12 + 0,14 + 0,4 + 0,14 + 0,1 + 0,1 = 1$.

11) Середины интервалов, вычисленные по формуле (6.6):

$$\tilde{x}_1 = \frac{-1,18 - 0,42}{2} = -0,80,\ \tilde{x}_2 = \frac{-0,42 + 0,34}{2} = -0,04,\ \tilde{x}_3 = \frac{0,34 + 1,10}{2} = 0,72,$$
$$\tilde{x}_4 = \frac{1,10 + 1,86}{2} = 1,48,\ \tilde{x}_5 = \frac{1,86 + 2,62}{2} = 2,24,\ \tilde{x}_6 = \frac{2,62 + 3,38}{2} = 3,00.$$

12) Интервальный статистический ряд представлен в табл. 6.3.

Таблица 6.3

I_i	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	Σ
$\tilde{x}_i$	–0,8	–0,04	0,72	1,48	2,24	7,00	—
n_i	6	7	20	7	5	5	50
p_i^*	0,12	0,14	0,4	0,14	0,1	0,1	1

Построение эмпирической функции распределения

1) Накопленные частоты:

$$z_1 = p_1^* = 0{,}12\,,\ z_2 = p_1^* + p_2^* = 0{,}12 + 0{,}14 = 0{,}26\,,$$

$$z_3 = p_1^* + p_2^* + p_3^* = 0{,}26 + 0{,}40 = 0{,}66\,,$$

$$z_4 = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 0{,}66 + 0{,}14 = 0{,}80\,,$$

$$z_5 = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* = 0{,}80 + 0{,}10 = 0{,}90\,,$$

$$z_6 = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* = 0{,}90 + 0{,}10 = 1{,}00\,.$$

2) Дискретный статистический ряд, в котором указаны середины интервалов $\tilde{x}_i$, частоты p_i^* и накопленные частоты z_i, представлен в табл. 6.4.

Таблица 6.4

$\tilde{x}_i$	–0,8	–0,04	0,72	1,48	2,24	3,00	Σ
p_i^*	0,12	0,14	0,4	0,14	0,1	0,1	1
z_i	0,12	0,26	0,66	0,8	0,9	1	—

3) Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$, вычисленная по формуле (6.9) через накопленные частоты z_i, имеет вид:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le -0{,}80, \\ 0{,}12, & -0{,}80 < x \le -0{,}04, \\ 0{,}26 & -0{,}04 < x \le 0{,}72, \\ 0{,}66, & 0{,}72 < x \le 1{,}48, \\ 0{,}80, & 1{,}48 < x \le 2{,}24, \\ 0{,}90, & 2{,}24 < x \le 3{,}00, \\ 1{,}00, & x > 3{,}00. \end{cases}$$

4) График эмпирической функции распределения и кумулята построены на рис. 6.4.

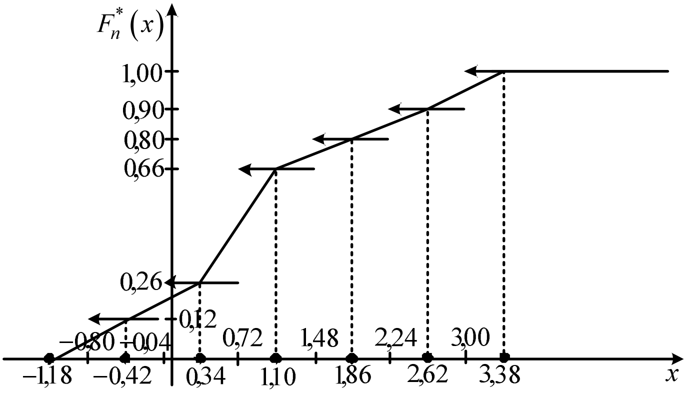

Рис. 6.4

Построение гистограммы и полигона

Вычислив значения $f_n^*(x)$ по формуле (6.10):

$$f_1^*(x) = \frac{0,12}{0,76} = 0,16\,,\ f_2^*(x) = \frac{0,14}{0,76} = 0,18\,,\ f_3^*(x) = \frac{0,40}{0,76} = 0,53\,,$$

$$f_4^*(x) = \frac{0,14}{0,76} = 0,18\,,\ f_5^*(x) = \frac{0,10}{0,76} = 0,13\,,\ f_6^*(x) = \frac{0,10}{0,76} = 0,13\,,$$

построим гистограмму и полигон (рис. 6.5).

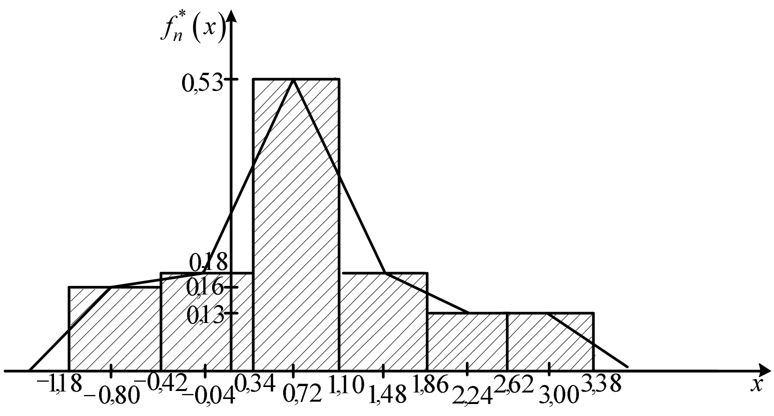

Рис. 6.5

Получение точечных статистических оценок

1) Выборочное среднее $\overline{x}$, вычисленное по формуле (6.11), равно:

$$\overline{x} = -0,8 \cdot 0,12 - 0,04 \cdot 0,14 + 0,72 \cdot 0,4 + 1,48 \cdot 0,14 + 2,24 \cdot 0,10 + 3 \cdot 0,10 = 0,92\,.$$

2) Выборочная дисперсия s^2, вычисленная по формуле (6.12), равна:

$$s^2 = (-0,8)^2 \cdot 0,12 + (-0,04)^2 \cdot 0,14 + 0,72^2 \cdot 0,4 +$$
$$+1,48^2 \cdot 0,14 + 2,24^2 \cdot 0,10 + 3^2 \cdot 0,10 - 0,92^2 = 1,12 .$$

3) Исправленная выборочная дисперсия $\overline{s}^2$ и исправленное выборочное СКВО $\overline{s}$, вычисленные по формулам (6.13), равны:

$$\overline{s}^2 = \frac{50}{49} s^2 = \frac{50}{49} \cdot 1,12 = 1,14 , \quad \overline{s} = \sqrt{\overline{s}^2} = \sqrt{1,14} = 1,07 .$$

4) Выборочная медиана, вычисленная по формуле (6.14), равна:

$$\mu^* = \frac{x_{24}^* + x_{25}^*}{2} = \frac{0,67 + 0,68}{2} = 0,675 .$$

5) Выборочные асимметрия A^* и эксцесс E^*, вычисленные по формулам (6.15), равны:

$$A^* = \frac{1}{1,07^3} \Big[(-0,8 - 0,92)^3 \cdot 0,12 + (-0,04 - 0,92)^3 \cdot 0,14 + (0,72 - 0,92)^3 \cdot 0,4 +$$
$$+ (1,48 - 0,92)^3 \cdot 0,14 + (2,24 - 0,92)^3 \cdot 0,10 + (3 - 0,96)^3 \cdot 0,10 \Big] = 0,31 .$$

$$E^* = \frac{1}{1,07^4} \Big[(-0,8 - 0,92)^4 \cdot 0,12 + (-0,04 - 0,92)^4 \cdot 0,14 + (0,72 - 0,92)^4 \cdot 0,4 +$$
$$+ (1,48 - 0,92)^4 \cdot 0,14 + (2,24 - 0,92)^4 \cdot 0,10 + (3 - 0,92)^4 \cdot 0,10 \Big] - 3 = -0,23 .$$

Предположение о характере распределения

Поскольку для нормального распределения эксцесс и асимметрия равны нулю, то достаточно малые значения E^* и A^*, а также вид гистограммы позволяют выдвинуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Построим теоретическую кривую — график плотности нормального распределения, параметрами которого будут вычисленные статистические оценки. Для этого в точках, являющихся серединами интервалов, вычислим значения плотностей нормального распределения с параметрами $a = \overline{x} = 0,92$ и $\sigma = \overline{s} = 1,07$ по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

в которой значения функции Гаусса $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ можно найти в таблице (см. табл. П.1).

Значения плотностей теоретического распределения:

$$f(\tilde{x}_1) = 0{,}109,\ f(\tilde{x}_2) = 0{,}252,\ f(\tilde{x}_3) = 0{,}360,$$
$$f(\tilde{x}_4) = 0{,}317,\ f(\tilde{x}_5) = 0{,}173,\ f(\tilde{x}_6) = 0{,}058.$$

Теоретическая кривая нормального распределения $f(x)$ и гистограмма построены на рис. 6.6. Их вид подтверждает возможность предположить, что распределение является нормальным. Это подтверждается и тем, что вычисленные по формулам (6.17) и (6.18) допустимые для выборочных асимметрии $A^* = 0{,}31$ и эксцесса $E^* = -0{,}23$ интервалы имеют вид:

$$(-\sigma_A; \sigma_A) = (-0{,}33; 0{,}33) \text{ и } (-\sigma_E; \sigma_E) = (-0{,}62; 0{,}62).$$

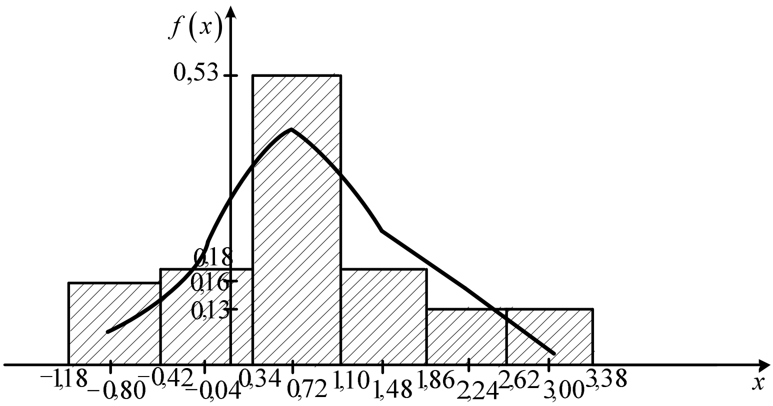

Рис. 6.6

6.4. Пример выполнения лабораторной работы "Первичная обработка экспериментальных данных" в среде Mathcad

Первоначальные сведения о программе для инженерных расчетов Mathcad

Для запуска Mathcad воспользуйтесь последовательностью **Пуск** → **Программы** → **Mathcad**.

В результате этого на экране появится основное окно приложения (рис. 6.7). В нем следует проверить, открыты ли необходимые для работы панели:

- математическая панель инструментов **Математическая** (Math) — на рис. 6.7 она в левом углу под главной панелью;
- панель графиков **Графики** (Graph) — на рис. 6.7 она слева;

- панель логических операторов **Логическая** (Boolean) — на рис. 6.7 она справа от панели графиков;
- панель матриц **Матрицы** (Matrix) — на рис. 6.7 она под панелью графиков;
- панель простейших вычислений **Калькулятор** (Calculator);
- панель **Программирование** (Mathcad Programming);
- панель греческих символов **Греческая** (Greek).

Если эти панели не открыты, то наведите курсор мыши на пункт главного меню **Вид** (View) и щелкните левой кнопкой мыши. Откроется список команд, в верхней строке которого будет команда **Панели инструментов** (Toolbar). Щелкните на ней мышью, а затем щелкните на названии панели, которую необходимо открыть.

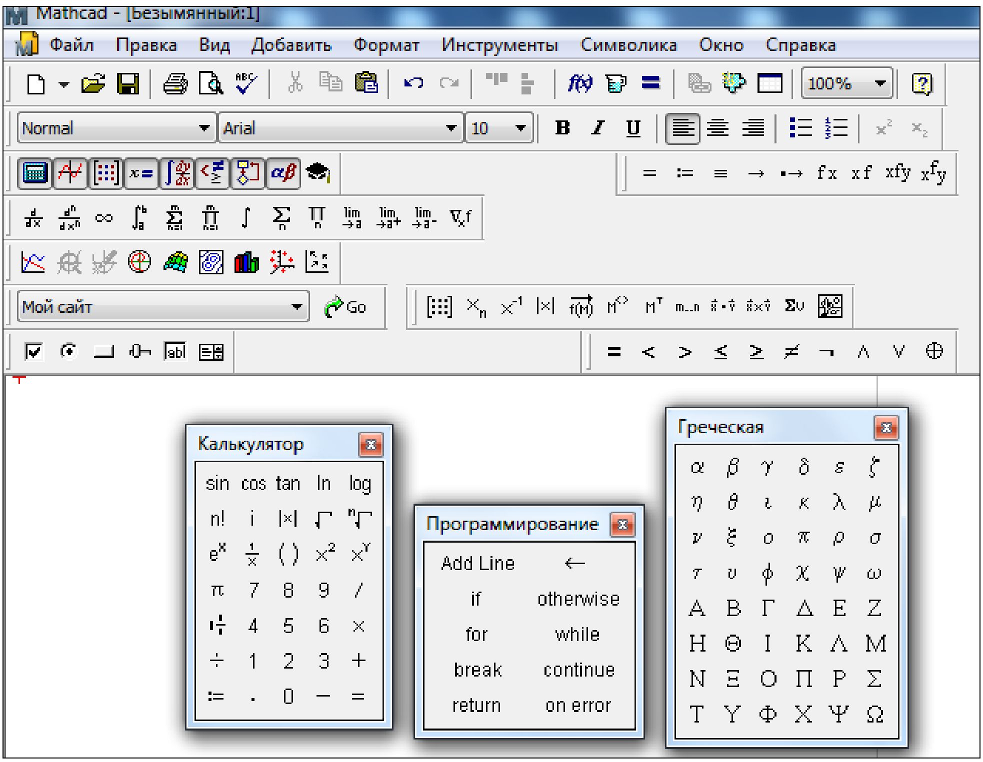

Рис. 6.7. Окно приложения Mathcad

Прежде чем вводить какой-либо оператор или математическое выражение, необходимо с помощью *курсора ввода* указать место, куда это выражение будет вводиться. Этот курсор можно передвигать клавишами <→>, <←>, <↑>, <↓> или курсором мыши.

Все операторы, функции и математические выражения вводятся в *местозаполнители* в виде черных рамок, которые появляются на экране после первого введенного символа. Местозаполнители в виде черных квадратов предназначены для ввода символов, а линии ввода (синего цвета) выделяют место, куда должен быть введен символ.

При наборе функций и выражений используются следующие правила.

- Числовые константы вводятся с клавиатуры арабскими цифрами, десятичной точкой и знаком "минус", например, 234, –12.345, 1.015.
- Можно задавать числовые константы в виде $4*10^{-4}$, звездочкой * при этом обозначается умножение — на экране звездочка отобразится как знак умножения, т. е. $4\cdot 10^{-4}$.
- Имена переменных — идентификаторы — составляются из латинских букв, цифр и греческих букв.
- Греческие буквы вводятся с помощью панели **Греческая** (Greek).
- Операцию возведения в степень можно задать с панели **Калькулятор** (Calculator) кнопкой $\mathbf{x^Y}$, вводя в черные квадраты открывшегося окна соответствующие числа или переменные.
- x^y можно вводить и с клавиатуры как $x\wedge y$.
- x^2 можно вводить сразу с панели **Калькулятор** (Calculator) соответствующей кнопкой $\mathbf{x^2}$, нажав ее после набора идентификатора x.
- Нижний индекс вводится с клавиатуры с помощью точки, т. е. набирается $x.\mathrm{min}$ — на экране отображается как x_{min}.
- Операция деления вводится с клавиатуры как x/y, а отобразится как $\dfrac{x}{y}$.
- Операция деления может вводиться с панели **Калькулятор** (Calculator) нажатием кнопки /, после чего откроется окно, в черных квадратах которого следует ввести нужные символы.
- Скобки, которые меняют порядок операций, набираются с клавиатуры или с панели **Калькулятор** (Calculator): можно сразу щелкнуть левой кнопкой мыши на кнопке **( )**, открыв этим окно, в черный квадрат которого вводится соответствующее выражение.
- Если кнопка **( )** нажимается после символа x, то этот символ заключается в скобки, т. е. (x).

Замечание 1

Все знаки арифметических и алгебраических операций, а также числовые константы можно набирать на клавиатуре либо щелкать левой кнопкой мыши по соответствующему значку на панели **Калькулятор** (Calculator).

Замечание 2

Следует иметь в виду, что в Mathcad за некоторыми идентификаторами переменных зарезервированы определенные значения, например: числа π и e.

Стандартные функции в среде Mathcad можно набирать с клавиатуры. При этом следует иметь в виду, что идентификаторы некоторых элементарных функций в среде Mathcad отличаются от общепринятых. Кроме того, аргумент функции заключается в скобки.

Некоторые функции, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и $\tan(x)$ есть на панели **Калькулятор** (Calculator). Можно вставить стандартную функцию командами **Добавить → Функцию** (Insert → Function) (или кнопкой ***f*(*x*)**, если открыта эта панель). В открывшемся диалоговом окне слева выбирается категория, к которой относится функция, а справа — конкретная функция.

Для построения графиков в среде Mathcad нужно открыть шаблон (рис. 6.8) с панели **Графики** (Graph) — первый значок на панели графиков.

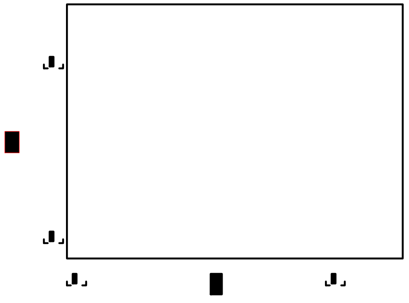

Рис. 6.8. Шаблон для построения графиков

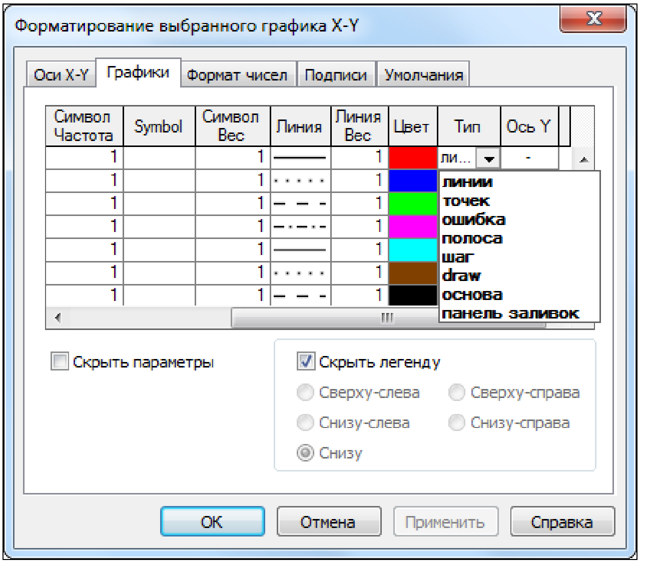

Рис. 6.9. Диалоговое окно форматирования графиков

В черный квадрат по горизонтали вводится аргумент функции, график которой необходимо построить, а в черный квадрат по вертикали — идентификатор функции. Если в одном шаблоне нужно построить графики нескольких функций, то их названия вводятся через запятую. Если это функции разных аргументов, то обозначения аргументов также вводятся через запятую.

Построенные графики можно форматировать так, как удобно пользователю, с помощью специального диалогового окна (рис. 6.9), которое открывается после щелчка правой кнопкой мыши по шаблону графика. С помощью диалогового окна форматирования графиков можно назначить цвет, толщину кривых, а также задать кривые в виде сплошных, пунктирных линий, в виде гистограмм и линий точек.

Построение интервального ряда

В начале работы нужно описать вектор выборочных данных с помощью оператора присваивания (на панели **Калькулятор** (Calculator))

$$x :=\blacksquare$$

и нажать первую кнопку панели **Матрицы** (Matrix). Откроется окно, в котором нужно указать число строк и столбцов матрицы (в данном случае 1 столбец и 50 строк). В открывшийся шаблон для вектора ввести заданные выборочные значения.

Удобно вводить выборочные значения в виде одной строки, а затем провести транспонирование, нажав кнопку $\mathbf{M^T}$ панели **Матрицы** (Matrix). Увидеть набранный набор выборочных значений в виде вектора можно, если набрать с клавиатуры $x =$. На рис. 6.10 представлены введенные в Mathcad данные, показана выборка, набранная в виде строки с последующим транспонированием, и вектор выборочных значений x. Команда ORIGIN:=1 устанавливает во всем приложении нумерацию элементов векторов и матриц с единицы (в противном случае нумерация начиналась бы с нуля).

x := (0.7 −0.28 1.24 2.28 2.2 2.73 −1.18 0.77 2.1 −0.09 0.31 −0.69 −0.85 0.02 0.23 −1.12

ORIGIN := 1

$n := 50 \qquad l := \mathrm{trunc}(1 + 3.32\cdot\log(50))$

$l = 6 \qquad \min(x) = -1.18 \qquad \max(x) = 3.38$

$h := \dfrac{\max(x) - \min(x)}{l} \qquad h = 0.76$

$f := \mathrm{histogram}(l, x) \qquad p := \dfrac{f^{\langle 2\rangle}}{n} \qquad f1 := \dfrac{p}{h}$

x =

	1
1	0.7
2	-0.28
3	1.24
4	2.28
5	2.2
6	2.73
7	-1.18
8	0.77
9	2.1
10	-0.09
11	0.31
12	-0.69
13	-0.85
14	0.02
15	0.23
16	...

$$f = \begin{pmatrix} -0.8 & 6 \\ -0.04 & 7 \\ 0.72 & 20 \\ 1.48 & 7 \\ 2.24 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.14 \\ 0.4 \\ 0.14 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad f1 = \begin{pmatrix} 0.158 \\ 0.184 \\ 0.526 \\ 0.184 \\ 0.132 \\ 0.132 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.10. Построение интервального ряда

В окне приложения (рис. 6.10) задаются и вычисляются:

- x — вектор выборочных значений;
- n — объем выборки;
- l — количество интервалов;
- $\min(x)$ — минимальное выборочное значение;
- $\max(x)$ — максимальное выборочное значение;
- h — длина интервала интервального ряда;
- F — матрица, в первом столбце которой середины интервалов интервального ряда, а во втором столбце — количество выборочных значений в каждом интервале.

Замечание

Обратите внимание, что переменная или вектор задаются с помощью оператора присваивания, а оператор = возвращает значение заданной переменной.

При вычислении переменной l используется встроенная функция trunc(z), вычисляющая целую часть числа z. При вычислении минимального и максимального элементов выборки используются встроенные функции min(x) и max(x), где x — вектор выборочных значений. Статистическая функция histogram(l, x), где l — число интервалов, x — вектор выборочных значений, вычисляет середины интервалов статистического ряда (первый столбец) и количество выборочных значений для каждого интервала (второй столбец) интервального ряда.

Построение гистограммы и полигона

На рис. 6.11 показано вычисление вектора частот **p**, по формуле $p = \frac{n_i}{n}$, в которой количество выборочных значений n_i для каждого интервала получены выделением в матрице **F** второго столбца набором соответствующего индекса с панели матриц кнопкой $\mathbf{M}^{\langle\rangle}$. Вектор **fl** — вектор эмпирических плотностей, который вычисляется по формуле $\mathbf{fl} = \frac{\mathbf{p}}{h}$.

На рис. 6.11 показано вычисление границ и середин интервалов. Вектор **int** — вектор середин интервалов, получается из матрицы **F** выделением в ней первого столбца набором соответствующего верхнего индекса с панели матриц кнопкой $\mathbf{M}^{\langle\rangle}$. Вектор **int**1 — вектор границ интервалов, получаемых из вектора середин интервалов сдвигом на $\frac{h}{2}$ влево. Последним элементом столбца **int**1 является максимальный элемент выборки.

$$int := f^{\langle 1 \rangle} \qquad int1 := int - \frac{h}{2} \qquad int1_7 := max(x)$$

$$int = \begin{pmatrix} -0.8 \\ -0.04 \\ 0.72 \\ 1.48 \\ 2.24 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad int1 = \begin{pmatrix} -1.18 \\ -0.42 \\ 0.34 \\ 1.1 \\ 1.86 \\ 2.62 \\ 3.38 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.11. Вычисление границ и середин интервалов

Замечание 1

Номер элемента вектора указывается в виде нижнего индекса, который вводится прямо с главной панели кнопкой подстрочный знак (соответствующий значок проявляется в окне главной панели после набора идентификатора переменной).

Замечание 2

Обратите внимание, что для обозначения переменных не используется переменная с индексом. Это обусловлено тем, что индексированная переменная в среде Mathcad применяется для элементов массивов — матриц или векторов.

Далее следует построить гистограмму и полигон. Для этого нужно открыть шаблон с панели **Графики** (Graph) — первая кнопка панели. В черный квадрат по горизонтали надо ввести название вектора середин интервалов **int**, а в черный квадрат по вертикали — название вектора эмпирических плотностей **fl**. Остальные местозаполнители предназначены для шаблона, их указывать не обязательно. В одном шаблоне можно строить несколько графиков, указывая идентификаторы соответствующих функций через запятую.

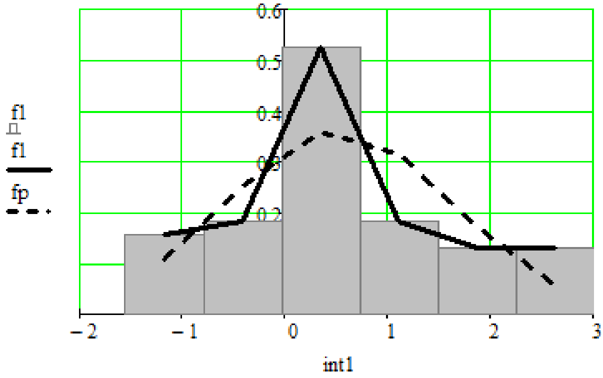

Рис. 6.12. Гистограмма, полигон и теоретическая кривая

На рис. 6.12 размещены построенные гистограмма и полигон частот — вектор **fl**, а также теоретическая кривая — плотность нормального распределения — вектор **fp** (его вычисление приведено далее). При этом полигон частот построен сплошной линией, а теоретическая кривая — пунктирной, что ясно из помещенной слева "легенды". Чтобы построить гистограмму для вектора **fl**, нужно в диалоговом окне форматирования графиков выбрать вкладку **Графики** (Traces) (см. рис. 6.9) и в раскрывающемся списке **Тип** (Type) выбрать пункт **Панель заливок** (Solid Bar).

Получение точечных характеристик. Построение теоретической кривой

Точечные характеристики (выборочные моменты) вычисляются с помощью встроенных функций:

- mean(x) — среднее выборочное $\overline{x}$;
- median(x) — выборочная медиана μ^*;
- Var(x) — исправленная выборочная дисперсия $\overline{s}^2$;
- Stdev(x) — исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение;
- kurt(x) — выборочный эксцесс E^*;
- Skev(x) — выборочная асимметрия A^*,

где x — вектор выборочных значений.

Вычисление выборочных моментов дано на рис. 6.13. Достаточно малые величины коэффициентов эксцесса и асимметрии, а также построенные гистограмма и полигон позволяют предположить, что генеральное распределение является нормальным. Поэтому в серединах интервалов интервального ряда вычислены значения плотности нормального распределения (вектор **fp**) через встроенную функцию dnorm(int, a, σ), где в качестве параметров a и σ взяты вычисленные среднее выборочное и выборочное среднее квадратичное отклонение. Как уже говорилось, теоретическая кривая построена на рис. 6.12 пунктирной линией.

$$\mathrm{mean(x)} = 0.902 \qquad \mathrm{Stdev(x)} = 1.094$$
$$\mathrm{median(x)} = 0.675 \qquad \mathrm{kurt(x)} = -0.23$$
$$\mathrm{Var(x)} = 1.198 \qquad \mathrm{skew(x)} = 0.313$$
$$\mathrm{fp} := \mathrm{dnorm}(\mathrm{int}, 0.902, 1.094)$$
$$\mathrm{fp} = \begin{pmatrix} 0.109 \\ 0.252 \\ 0.36 \\ 0.317 \\ 0.173 \\ 0.058 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.13. Вычисление точечных характеристик и плотности гипотетического распределения

Построение эмпирической функции распределения

Для построения кумуляты формируется вектор **kum** — вектор накопленных частот. Формирование этого вектора показано на рис. 6.14. Элементы вектора **kum** вычисляются как *ранжированная переменная*, значения которой вычисляются при i от 1 до 6 шагом 1. Следует учитывать, что в операторе $i := 1..6$ многоточие набирается на клавиатуре английского регистра — русская буква **ж**. Графическое представление этого вектора в виде кусочно-линейной линии, соединяющей точки ($int1_i$, kum_i) дано на рис. 6.15.

Построение эмпирической функции распределения — femp(z) показано на рис. 6.14 с помощью условных операторов присваивания — кнопки **Add Line** и **if** на панели **Программирование** (Programming), в которых знаки логических операций набираются на шкале **Логическая** (Boolean).

Замечание

Оператор **Add Line** задает "тело цикла" в виде вертикальной черты с окнами для введения в них соответствующих операторов. Следует иметь в виду, что однократное нажатие этой кнопки откроет только два окна — две строки в теле цикла. Если их больше, то **Add Line** нужно нажать несколько раз. Лишние строки можно будет удалить, а получить новые строчки, находясь в теле цикла, уже нельзя.

$$i := 1..6$$

$$kum_1 := 0 \qquad kum_{i+1} := kum_i + p_i$$

$$kum = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.12 \\ 0.26 \\ 0.66 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad femp(z) := \left| \begin{array}{l} 0 \ \text{ if } \ z \le \min(x) \\ kum_1 \ \text{ if } \ \min(x) < z \le int_1 \\ kum_2 \ \text{ if } \ int_1 < z \le int_2 \\ kum_3 \ \text{ if } \ int_2 < z \le int_3 \\ kum_4 \ \text{ if } \ int_3 < z \le int_4 \\ kum_5 \ \text{ if } \ int_4 < z \le int_5 \\ kum_6 \ \text{ if } \ int_5 < z \le int_6 \\ kum_7 \ \text{ if } \ z > int1_6 \end{array} \right.$$

Рис. 6.14. Построение эмпирической функции распределения и кумуляты

График функции femp(z) показан на рис. 6.15 в виде кусочно-постоянной линии с разрывами в серединах интервалов. Это достигается указанием в окне **Форматирование...** на вкладке **Графики** (Traces) в раскрывающемся списке **Тип** (Type) — пункта **Точек** (Points) (см. рис. 6.9).

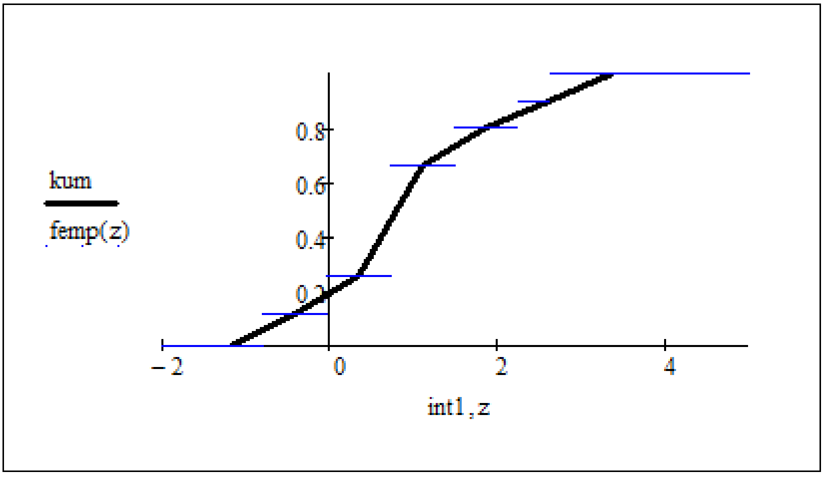

Рис. 6.15. Кумулята и эмпирическая функция распределения

ГЛАВА 7

Проверка статистических гипотез и интервальные оценки

В некоторых случаях требуется знать закон распределения генеральной совокупности. Если этот закон неизвестен, то можно предположить его определенный вид (например, нормальный). В этом случае говорят, что выдвигается гипотеза: генеральная совокупность распределена нормально. В других случаях закон распределения известен, но неизвестны его параметры. Тогда можно выдвинуть гипотезу о значении этих параметров.

7.1. Основная и альтернативная гипотезы

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения на основе выборочных данных.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. *Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу H_1, которая противоречит основной. В случае, когда основная гипотеза H_0 отвергается, принимается альтернативная гипотеза H_1.

Гипотеза H_0 принимается или отвергается с помощью *критериев согласия*. При этом вывод об истинности или ложности гипотезы H_0 делается на основе выборочных данных, т. е. только с некоторой вероятностью. При этом может быть отвергнута истинная гипотеза или принята ложная гипотеза. В первом случае говорят, что сделана ошибка первого рода, а во втором — ошибка второго рода.

Пусть событие A состоит в том, что принимается гипотеза H_0. Тогда событие $\overline{A}$ — гипотеза H_0 отвергается. Вероятность сделать ошибку 1 рода называется *уровнем значимости* и обозначается через α, т. е. $\alpha = P\left(\overline{A}/H_0\right)$. Вероятность сделать ошибку 2 рода обозначается через β, т. е. $\beta = P\left(A/\overline{H}_0\right)$, а число $1-\beta$ называется *мощностью критерия.*

Замечание

Обычно уровень значимости задают достаточно малым, чаще всего $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$. Из возможных критериев выбирается самый мощный, т. е. критерий с минимальной вероятностью ошибки 2 рода.

7.2. Критерии согласия. Общая схема проверки статистических гипотез

Для проверки выдвинутой основной гипотезы H_0 выбирается критерий согласия. Суть проверки гипотезы H_0 по критерию согласия состоит в том, что выбирается некоторая статистика $\zeta_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, закон распределения которой известен в предположении, что гипотеза H_0 истинна.

По статистике критерия $\zeta_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ и заданному уровню значимости множество вещественных чисел разбивают на две части, одну из них — $\bar{D}$ называют *критической областью*, другую — D называют областью принятия гипотезы.

Критическая область может быть односторонней (правосторонней или левосторонней) (рис. 7.1 и 7.2 соответственно). В этом случае критерий согласия называется *односторонним.*

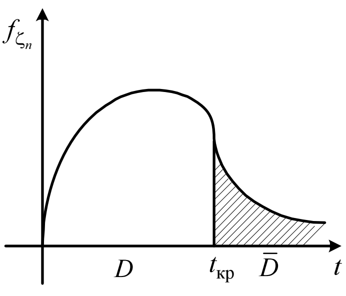

Рис. 7.1

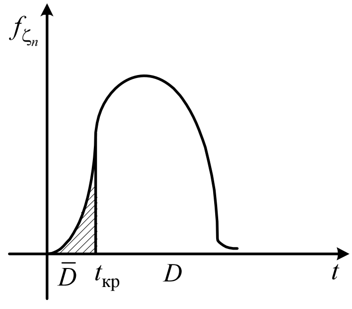

Рис. 7.2

Для определения односторонней критической области достаточно найти критическую точку $t_{\text{кр}}$ — квантиль, разделяющий области D и $\bar{D}$. Если критическая область правосторонняя, то квантиль $t_{\text{кр}}$ определяется из соотношения

$$P\left\{\zeta_n > t_{\text{кр}} / H_0\right\} = \alpha ,$$

где $P\left\{\zeta_n > t_{\text{кр}} / H_0\right\}$ — вероятность события $\zeta_n \in \bar{D}$ при условии, что гипотеза H_0 верна.

Если критическая область левосторонняя, то квантиль $t_{\text{кр}}$ определяется из соотношения

$$P\left\{\zeta_n < t_{\text{кр}} / H_0\right\} = \alpha .$$

Критическая область может быть двусторонней (рис. 7.3). В этом случае критерий называется *двусторонним.*

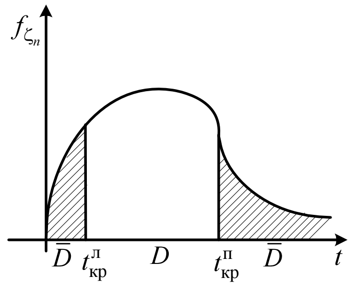

Рис. 7.3

Если критическая область двусторонняя, то определяют $t_{\text{кр}}^{\text{л}}$ и $t_{\text{кр}}^{\text{п}}$ — левую и правую границы критической области из условия

$$P\left\{\zeta_n < t_{\text{кр}}^{\text{л}} \big/ H_0\right\} = P\left\{\zeta_n > t_{\text{кр}}^{\text{п}} \big/ H_0\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

Гипотеза H_0 принимается, если $\zeta_n(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$. Гипотеза H_0 отвергается, если $\zeta_n(x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{D}$.

Проверка гипотезы о законе распределения случайной величины на основе критерия Пирсона

Если используется критерий Пирсона, то в качестве статистики $\zeta_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ выбирается функция выборочных данных $\chi^2_{\text{набл}}$, которая вычисляется по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{7.1}$$

где p_i — вероятности попадания случайной величины X в интервал $I_i = [a_{i-1}; a_i)$; l — количество интервалов статистического ряда; n_i — количества выборочных значений, попавших в интервал I_i; n — объем выборки.

Если основная гипотеза H_0 верна, то статистика $\chi^2_{\text{набл}}$ распределена асимптотически по закону χ^2 (хи-квадрат) с m степенями свободы. Число степеней свободы определяется числом интервалов l и числом неизвестных параметров гипотетического (предполагаемого) распределения r по формуле:

$$m = l - r - 1. \tag{7.2}$$

Таблица 7.1

I_i	$[a_0;\ a_1)$	$[a_1;\ a_2)$	...	$[a_{l-1};\ a_l]$	Σ
n_i	n_1	n_2	...	n_l	50

Если построен интервальный ряд (табл. 7.1), построены гистограмма, полигон и теоретическая кривая, то проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности по критерию Пирсона проводится следующим образом.

1. По виду гистограммы и теоретической кривой выдвигается *основная гипотеза* H_0 о виде распределения генеральной совокупности X. Альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что основная гипотеза H_0 не выполнена.
2. Перед использованием критерия Пирсона выясняется, в каждом ли интервале ряда количество наблюдений больше пяти. Если в каком-то интервале это не так, то его объединяют с одним из соседних интервалов. При этом количество

интервалов l уменьшается, а количества соответствующих выборочных значений n_i складываются.

3. Далее вычисляются p_i — вероятности попадания генеральной совокупности X в интервал $I_i = [a_{i-1}; a_i)$ по формулам:

$$p_i = P\{a_{i-1} \le \xi \le a_i\} = F(a_i) - F(a_{i-1}),\ i = 1, 2, ..., l. \tag{7.3}$$

где $F(x)$ — гипотетическая функция распределения. При этом:

- если основная гипотеза H_0 состоит в том, что генеральная совокупность X распределена по нормальному закону, то вероятности p_i определяются по формулам:

$$p_i = \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x}}{\overline{s}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \overline{x}}{\overline{s}}\right),\ i = 1, 2, ..., l, \tag{7.4}$$

  где $\overline{x}$ — среднее выборочное; $\overline{s}$ — исправленное выборочное СКВО; $\Phi(x)$ — функция Лапласа, значения которой находится из таблицы (см. табл. П.2);

- если основная гипотеза H_0 состоит в том, что X распределена по показательному закону, то вероятности p_i определяются по формулам:

$$p_i = e^{-\lambda a_{i-1}} - e^{-\lambda a_i},\ i = 1, 2, ..., l, \tag{7.5}$$

  где параметр $\lambda = \dfrac{1}{\overline{x}}$, $\overline{x}$ — среднее выборочное;

- если основная гипотеза H_0 состоит в том, что X распределена равномерно на отрезке $[a_0; a_l]$, то вероятности p_i определяются по формулам:

$$p_i = \frac{1}{a_l - a_0}(a_i - a_{i-1}),\ i = 1, 2, ..., l. \tag{7.6}$$

4. После этого вычисляется статистика $\chi^2_{\text{набл}}$ по формуле (7.1). Статистика $\chi^2_{\text{набл}}$ распределена асимптотически по закону χ^2 с m степенями свободы. Число степеней свободы при этом равно: $m = l_1 - r - 1$, где l_1 — новое число интервалов; r — число оцениваемых параметров. При этом:

- если выдвинута гипотеза о нормальном распределении, то оцениваемых параметров два: математическое ожидание a и среднеквадратическое отклонение σ;
- если выдвинута гипотеза о показательном распределении, то оцениваемый параметр один: λ — число, обратное математическому ожиданию;
- если проверяется гипотеза о равномерном на интервале $(a; b)$ распределении, то оцениваемых параметров два: a и b, и т. д.

Все вычисления удобно проводить, заполняя табл. 7.2.

Таблица 7.2

№	$[a_{i-1}, a_i)$	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$[a_0, a_1)$	n_1	p_1	np_1	$\frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1}$
2	$[a_1, a_2)$	n_2	p_2	np_2	$\frac{(n_2 - np_2)^2}{np_2}$
...	...	...	...	...	...
l	$[a_{l-1}, a_l]$	n_l	p_l	np_l	$\frac{(n_l - np_l)^2}{np_l}$
Σ	—	n	1	n	$\chi^2_{\text{набл}}$

Для вычисления границ критической области задается число α, называемое *уровнем значимости* и равное вероятности отвергнуть истинную гипотезу H_0. Уровень значимости должен быть малым. Мы рекомендуем выбирать $\alpha = 0,01 - 0,05$.

1. Односторонняя критическая область.

   По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы m из таблицы распределения χ^2 (см. табл. П.3) определяют границу (рис. 7.4) односторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2_{m,\alpha}$ так, что $\alpha = P\left\{\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}} \big/ H_0\right\}$.

   Гипотеза о выбранном законе распределения генеральной совокупности принимается, если $\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\text{кр}}$.

   Если $\chi^2_{\text{набл}}$ попадает в критическую область, т. е. $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза: распределение генеральной совокупности не совпадает с гипотетическим распределением.

2. Двусторонняя критическая область.

   По заданному значению уровня значимости α и по вычисленному числу степеней свободы m из таблицы распределения χ^2 (см. табл. П.3) определяют границы (рис. 7.5) двусторонней критической области

$$\chi^2_{\text{кр}1} = \chi^2_{m,1-\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \chi^2_{\text{кр}2} = \chi^2_{m,\frac{\alpha}{2}},$$

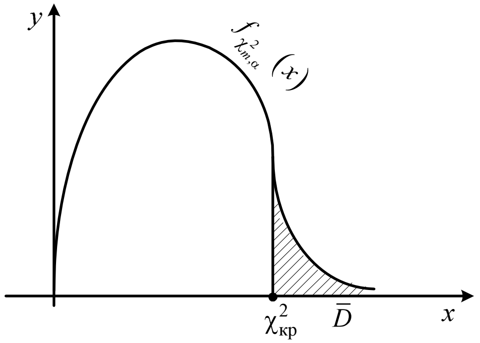

Рис. 7.4

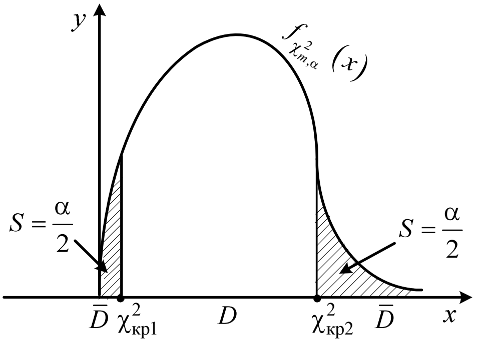

Рис. 7.5

так, что

$$P\left\{\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр2} \big/ H_0\right\} = \frac{\alpha}{2} \text{ и } P\left\{\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр1} \big/ H_0\right\} = 1 - P\left\{\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр1} \big/ H_0\right\} = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

В соответствии с критерием согласия Пирсона, гипотеза о выбранном теоретическом законе распределения принимается, если $\chi^2_{набл}$ попадает в область принятия гипотезы, т. е. при выполнении условия:

$$\chi^2_{кр1} \le \chi^2_{набл} \le \chi^2_{кр2}.$$

Если $\chi^2_{набл}$ попадает в критическую область, т. е. $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр1}$ или $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр2}$, то гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза: распределение генеральной совокупности не совпадает с гипотетическим распределением.

Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности по критерию Колмогорова

Пусть $F(x)$ — неизвестная функция распределения генеральной совокупности X, а $F_n^*(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$. Известно, что случайная величина

$$\rho_n = \sqrt{n} \max_x \left| F_n^*(x) - F(x) \right|$$

асимптотически распределена по закону Колмогорова, т. е.

$$F_{\rho_n}(x) = P\{\rho_n < x\} \underset{n\to\infty}{\to} K(x), \tag{7.7}$$

где $K(x)$ — функция распределения Колмогорова, значения которой можно найти в таблице (см. табл. П.4).

Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности по критерию Колмогорова проводится следующим образом:

1. Выдвигается основная гипотеза H_0 о виде генерального распределения. Тогда
$$F(x) = F_0(x),$$
где $F_0(x)$ — гипотетическая функция распределения.

2. Выбирается статистика $\zeta_n = \sqrt{n} \max\limits_x \left| F_n^*(x) - F_0(x) \right|$, которая совпадает с ρ_n и распределение которой удовлетворяет (7.7) в случае истинности гипотезы H_0.

3. Вычисляются значения статистики ζ_n в точках a_i $(i = 0, 1, ..., l)$ — границах интервального ряда. В подавляющем большинстве случаев $\max \left| F_n^*(x) - F_0(x) \right|$ достигается в этих точках.

   При вычислении статистики ζ_n значения эмпирической функции распределения $F_n^*(a_i)$ определяют по формуле (6.9). Значения $F_0(a_i)$ вычисляются в зависимости от выдвинутой гипотезы H_0:

   - если выдвинута гипотеза о нормальном распределении, то
   $$F_0(a_i) = 0,5 + \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x}}{\overline{s}}\right), \tag{7.8}$$
   где $\overline{x}$ — выборочное среднее; $\overline{s}$ — исправленное выборочное СКВО; $\Phi(x)$ — функция Лапласа, значения которой берутся из таблицы (см. табл. П.2);

   - если выдвинута гипотеза о показательном распределении, то
   $$F_0(a_i) = \begin{cases} 0, & a_i < a_0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot a_i}, & a_i \ge a_0 \end{cases}, \tag{7.9}$$
   где параметр $\lambda = \dfrac{1}{\overline{x}}$, $\overline{x}$ — среднее выборочное;

   - если выдвинута гипотеза о равномерном распределении, то
   $$F_0(a_i) = \frac{a_i - a_0}{a_l - a_0}, \ a_0 \le a_i \le a_l, \tag{7.10}$$
   где a_i — границы интервалов интервального ряда.

   Все вычисления заносятся в табл. 7.3. Выбирая в последнем столбце этой таблицы наибольшее значение $\left| F_n^*(a_i) - F_0(a_i) \right|$, легко вычислить статистику $\zeta_n = \sqrt{n} \cdot \max\limits_i \left| F_n^*(a_i) - F_0(a_i) \right|$.

4. На следующем шаге задается уровень значимости q. Критическая область $\overline{D}$ определяется условием
$$P\{ \zeta_n \in \overline{D} / H_0 \} = q$$

Таблица 7.3

a_i	$F_n^*(a_i)$	$F_0(a_i)$	$\left\lvert F_n^*(a_i) - F_0(a_i) \right\rvert$
a_0	$F_n^*(a_0)$	$F_0(a_0)$	$\left\lvert F_n^*(a_0) - F_0(a_0) \right\rvert$
a_1	$F_n^*(a_1)$	$F_0(a_1)$	$\left\lvert F_n^*(a_1) - F_0(a_1) \right\rvert$
...	...	...	...
a_l	$F_n^*(a_l)$	$F_0(a_l)$	$\left\lvert F_n^*(a_l) - F_0(a_l) \right\rvert$

и может быть односторонней: $\bar{D} = \left[\lambda_q; +\infty\right)$ (рис. 7.6) или двусторонней: $\bar{D} = \left(0; \lambda_{1-\frac{q}{2}}\right] \cup \left[\lambda_{\frac{q}{2}}; +\infty\right)$ (рис. 7.7).

В первом случае по заданному значению q определяется λ_q, такое, что $P\left\{\zeta_n \ge \lambda_q / H_0\right\} = q$ из таблицы распределения Колмогорова (см. табл. П.4). Если значение статистики $\zeta_n \in \bar{D} = \left[\lambda_q; +\infty\right)$, т. е. $\zeta_n \ge \lambda_q$, то основная гипотеза отвергается. Если $\zeta_n < \lambda_q$, то гипотеза H_0 принимается, т. е. генеральное распределение считается совпадающим с гипотетическим.

В случае двусторонней критической области ее границы $\lambda_{1-\frac{q}{2}}$ и $\lambda_{\frac{q}{2}}$ также выбираются из таблицы распределения Колмогорова (см. табл. П.4), в которой вместо значения q на входе задаются значения $1-\frac{q}{2}$ и $\frac{q}{2}$ соответственно, поскольку из рис. 7.7 ясно, что

$$P\left\{\xi_n \ge \lambda_{\frac{q}{2}} / H_0\right\} = \frac{q}{2},\ P\left\{0 \le \xi_n \le \lambda_{1-\frac{q}{2}} / H_0\right\} = 1 - P\left\{\xi_n \ge \lambda_{1-\frac{q}{2}} / H_0\right\} = 1 - \left(1 - \frac{q}{2}\right) = \frac{q}{2}.$$

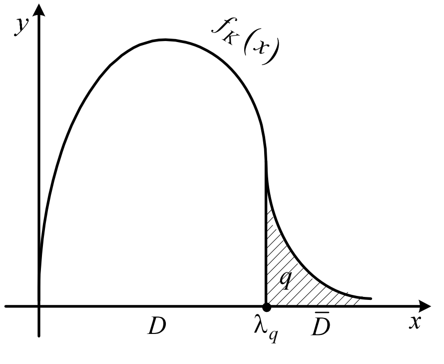

Рис. 7.6

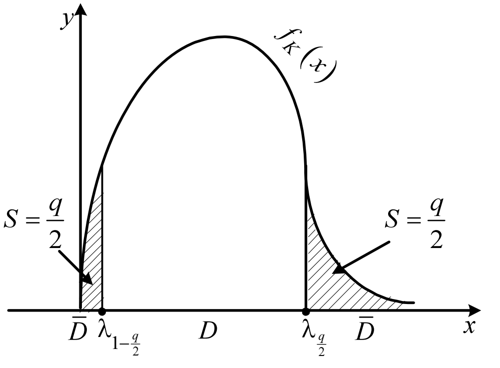

Рис. 7.7

Если значение статистики

$$\xi_n \in \bar{D}\text{, т. е. } \xi_n \geq \lambda_{\frac{q}{2}} \text{ или } \xi_n \leq \lambda_{1-\frac{q}{2}},$$

то основная гипотеза отвергается. Если $\lambda_{1-\frac{q}{2}} < \xi_n < \lambda_{\frac{q}{2}}$, то гипотеза H_0 принимается.

7.3. Интервальные оценки параметров распределения

Интервальное оценивание параметров распределения предполагает построение *доверительных интервалов*, в которые с заданной *доверительной вероятностью* β попадают неизвестные параметры распределения генеральной совокупности.

Если принята гипотеза о нормальном распределении, то необходимо построить доверительные интервалы для математического ожидания a и среднеквадратического отклонения σ.

Доверительный интервал для математического ожидания при известном среднеквадратическом отклонении

Интервал

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\beta; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\beta\right), \tag{7.11}$$

в котором $\bar{x}$ — среднее выборочное, σ^2 — известная дисперсия, n — объем выборки, значение t_β определяется из таблицы значений функции Лапласа (см. табл. П.2) через функцию $\Phi_0^{-1}(x)$ — обратную функции Лапласа — формулой

$$t_\beta = \Phi_0^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right), \tag{7.12}$$

покрывает с заданной доверительной вероятностью (надежностью) β неизвестный параметр a — математическое ожидание гауссовского (нормального) генерального распределения.

Доверительный интервал (7.12) иногда записывают в виде:

$$(\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon), \tag{7.13}$$

где величину

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\beta \tag{7.14}$$

часто называют *точностью*.

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном среднеквадратическом отклонении

Если СКВО σ неизвестно, то оно заменяется исправленным выборочным СКВО $\overline{s}$. Тогда определенная формулой (7.14) точность будет иметь вид:

$$\varepsilon = \frac{\overline{s}}{\sqrt{n}} t_{n-1,\beta} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{n-1,\beta},$$

где s — выборочное СКВО, число $t_{n-1,\beta}$ определяют по заданной доверительной вероятности β и числу степеней свободы $m = n-1$ из таблицы значений $t_{m,\beta}$ распределения Стьюдента (см. табл. П.5), удовлетворяющих условию

$$\beta = P\left\{ |\tau_m| < t_{m,\beta} \right\}.$$

Следовательно, интервал

$$\left(\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{n-1,\beta}; \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{n-1,\beta} \right), \tag{7.15}$$

в котором $\overline{x}$ — среднее выборочное, s^2 — выборочная дисперсия, n — объем выборки, значения $t_{n-1,\beta}$ берутся из таблицы (см. табл. П.5), покрывает с надежностью β неизвестный параметр a — математическое ожидание гауссовского (нормального) генерального распределения.

Чтобы построить доверительный интервал (7.15), необходимо:

- задать доверительную вероятность (надежность) $\beta = 0{,}92 \div 0{,}99$;
- по заданной надежности β и числу степеней свободы $m = n-1$ из таблицы значений $t_{m,\beta}$ распределения Стьюдента (см. табл. П.5) найти $t_{n-1,\beta}$;
- вычислить точность $\varepsilon = \dfrac{s}{\sqrt{n-1}} t_{n-1,\beta}$;
- выписать доверительный интервал $(\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon)$ для параметра a.

Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения

Чтобы получить доверительный интервал для СКВО σ нормального генерального распределения, вычисляют значения γ_1 и γ_2 с помощью таблицы распределения χ^2 (см. табл. П.3) так, чтобы (рис. 7.8):

$$\gamma_2 = \chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}} \text{ или } P\left\{ \chi^2_{n-1} > \gamma_2 \right\} = \frac{1-\beta}{2}, \tag{7.16}$$

$$\gamma_1 = \chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}} \text{ или } P\left\{ \chi^2_{n-1} < \gamma_1 \right\} = 1 - P\left\{ \chi^2_{n-1} > \gamma_1 \right\} = 1 - \frac{1-\beta}{2} = \frac{1+\beta}{2}. \tag{7.17}$$

Это означает, что для определения γ_1 в таблице распределения χ^2 (см. табл. П.3) нужно положить $\alpha = \frac{1+\beta}{2}$ и $m = n-1$, а для определения γ_2 — $\alpha = \frac{1-\beta}{2}$ и $m = n-1$.

Тогда при вычисленных γ_1 и γ_2 интервал

$$\left(\overline{s}\sqrt{\frac{n-1}{\gamma_2}}; \overline{s}\sqrt{\frac{n-1}{\gamma_1}}\right), \tag{7.18}$$

где $\overline{s}^2$ — исправленная выборочная дисперсия, n — объем выборки, числа γ_1 и γ_2 определяются формулами (7.16) и (7.17), покрывает с надежностью β параметр σ нормального распределения.

Если принята гипотеза о показательном распределении, то следует найти доверительные интервалы для неизвестных математического ожидания и среднеквадратического отклонения по формулам (7.15) и (7.18), которые можно использовать, если выборка достаточно большого объема. Аналогично следует поступать, если основная гипотеза окажется отвергнутой, т. е. характер распределения останется неизвестным.

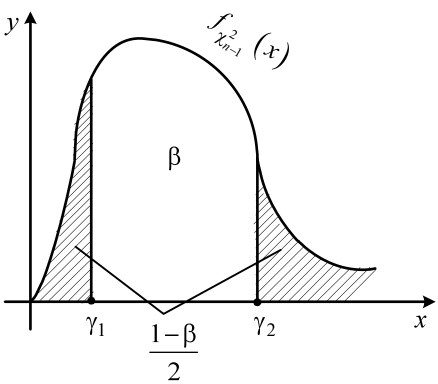

Рис. 7.8

7.4. Пример выполнения лабораторной работы "Проверка статистических гипотез и интервальное оценивание"

Для построенного интервального ряда распределения (табл. 7.4), в котором границы интервалов равны

$$a_0 = -1{,}18,\ a_1 = -0{,}42,\ a_2 = 0{,}34,\ a_3 = 1{,}10,\ a_4 = 1{,}86,\ a_5 = 2{,}62,\ a_6 = 3{,}38,$$

принять или отвергнуть гипотезу H_0: генеральная совокупность X распределена по нормальному закону, используя критерии Пирсона и Колмогорова. Альтернативная гипотеза H_1: гипотеза H_0 не выполнена.

Таблица 7.4

I_i	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	Σ
$\tilde{x}_i$	–0,8	–0,04	0,72	1,48	2,24	7,00	—
n_i	6	7	20	7	5	5	50
p_i^*	0,12	0,14	0,4	0,14	0,1	0,1	1

Проверка основной гипотезы по критерию Пирсона

1. Во всех интервалах статистического ряда абсолютные частоты $n_i \geq 5$. Поэтому объединение интервалов проводить не нужно.
2. Поскольку выдвинута гипотеза о нормальном распределении, то вероятности p_i вычисляются по формуле (7.4). Соответствующие значения функции Лапласа определяются из таблицы (см. табл. П.2).

$$p_1 = P\{a_0 \leq X \leq a_1\} = \Phi\left(\frac{a_1 - \overline{x}}{\overline{s}}\right) - \Phi\left(\frac{a_0 - \overline{x}}{\overline{s}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{-0,42 - 0,92}{1,07}\right) - \Phi\left(\frac{-1,18 - 0,92}{1,07}\right) = -\Phi_0(1,25) - \Phi_0(1,96) = -0,39 + 0,47 = 0,08;$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{0,34 - 0,92}{1,07}\right) - \Phi\left(\frac{-0,42 - 0,92}{1,07}\right) = -\Phi(0,54) + \Phi(1,25) = -0,21 + 0,39 = 0,18;$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{1,1 - 0,92}{1,07}\right) - \Phi\left(\frac{0,34 - 0,92}{1,07}\right) = \Phi(0,17) + \Phi(0,54) = 0,07 + 0,21 = 0,28;$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{1,86 - 0,92}{1,07}\right) - \Phi\left(\frac{1,1 - 0,92}{1,07}\right) = \Phi(0,88) - \Phi(0,17) = 0,31 - 0,07 = 0,24;$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{2,62 - 0,92}{1,07}\right) - \Phi\left(\frac{1,86 - 0,92}{1,07}\right) = \Phi(1,59) - \Phi(0,88) = 0,44 - 0,31 = 0,13;$$

$$p_6 = \Phi\left(\frac{3,38 - 0,92}{1,07}\right) - \Phi\left(\frac{2,62 - 0,92}{1,07}\right) = \Phi(2,29) - \Phi(1,59) = 0,49 - 0,44 = 0,05.$$

3. Статистику $\chi^2_{\text{набл}}$ удобно вычислять по формуле (7.1), заполняя табл. 7.5.
4. В последней строке и в последнем столбце табл. 7.5 — сумма $\sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, т. е. значение статистики $\chi^2_{\text{набл}}$. Следовательно, $\chi^2_{\text{набл}} = 8,94$.
5. Поскольку интервалов шесть, а оцениваемых параметров два (a и σ), то число степеней свободы m, вычисленное по формуле (7.2), равно:

$$m = 6 - 2 - 1 = 3.$$

Таблица 7.5

№	$[a_{i-1};\, a_i)$	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	[–1,18; –0,42)	6	0,08	4	1,00
2	[–0,42; 0,34)	7	0,18	9	0,44
3	[0,34; 1,1)	20	0,28	14	2,57
4	[1,1; 1,86)	7	0,24	12	2,08
5	[1,86; 2,62)	5	0,13	6,5	0,346
6	[2,62; 3,38]	5	0,05	2,5	2,5
Σ	—	50	—	—	8,936

6. По заданному уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ и по вычисленному числу степеней свободы $m = 3$ из таблицы распределения χ^2 (см. табл. П.3) определим границу критической области, которую выберем односторонней

$$\chi^2_{\text{кр}} = 11{,}34\,.$$

7. Гипотеза о нормальном законе распределения генеральной совокупности принимается, т. к.

$$\chi^2_{\text{набл}} = 8{,}94 \le \chi^2_{\text{кр}}\,.$$

Проверка основной гипотезы по критерию Колмогорова

Согласно критерию Колмогорова вычисляется статистика

$$\xi_n = \sqrt{n}\max_x \left|F_n^*(x) - F_0(x)\right|,$$

в граничных точках интервального ряда.

1. Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ для интервального статистического ряда из табл. 7.4 была вычислена в предыдущей главе *(см. разд. 6.3)*. Значения $F_0(a_i)$ вычисляются с учетом того, что выдвинута гипотеза о нормальном распределении, т. е. используя формулу (7.8). Все вычисления удобно внести в табл. 7.6. Для удобства вычисления $F_0(a_i)$ введем в таблицу столбец значений $\frac{a_i - \overline{x}}{\overline{s}}$ с вычисленным в *разд. 6.3* средним выборочным $\overline{x} = 0{,}92$ и исправленной выборочной дисперсией $\overline{s} = 1{,}07$.

Таблица 7.6

a_i	$F_n^*(a_i)$	$\frac{a_i - \bar{x}}{\bar{s}}$	$F_0(a_i)$	$\left\|F_n^*(a_i) - F_0(a_i)\right\|$
–1,18	0,00	–1,96	0,025	0,025
–0,42	0,12	–1,25	0,105	0,015
0,34	0,26	–0,54	0,295	0,035
1,10	0,66	0,17	0,567	0,093
1,86	0,80	0,88	0,810	0,010
2,62	0,90	1,59	0,944	0,044
3,38	1,00	2,30	0,989	0,011

2. Из последнего столбца таблицы ясно, что
$$\max_i \left| F_n^*(a_i) - F_0(a_i) \right| = 0,093 .$$
Тогда значение статистики Колмогорова равно:
$$\zeta_n = \sqrt{n} \cdot \max_i \left| F_n^*(a_i) - F_0(a_i) \right| = \sqrt{50} \cdot 0,093 = 0,658 .$$
3. Зададим уровень значимости $q = 0,01$. По заданному значению q определим λ_q из таблицы распределения Колмогорова (см. табл. П.4).
4. Поскольку значение статистики $\zeta_n = 0,658$ меньше значения $\lambda_q = 1,627$, то основная гипотеза H_0 принимается, т. е. генеральное распределение считается нормальным.

Вывод. Выдвинутая основная гипотеза принимается, т. е. генеральная совокупность распределена по нормальному закону. Проверка выдвинутой гипотезы по критерию Пирсона и Колмогорова привели к одинаковому результату.

Интервальное оценивание параметров распределения

Поскольку принята гипотеза о нормальном законе генеральной совокупности, то следует найти доверительные интервалы для параметров нормального распределения, т. е. для параметра a — математического ожидания и для σ — среднеквадратического отклонения.

Доверительный интервал для параметра a *:*

1. Пусть доверительная вероятность (надежность) $\beta = 0,99$.
2. По таблице распределения Стьюдента (см. табл. П.5) определим $t_\beta = 2,405$ для $\beta = 0,99$ и для числа степеней свободы $m = n - 1 = 49$.

3. Вычислим точность ε:

$$\varepsilon = t_\beta \cdot \frac{s}{\sqrt{m}} = 2,405 \cdot \frac{1,06}{\sqrt{49}} = 0,364 .$$

4. Доверительный интервал для математического ожидания a нормального распределения, построенный по формуле (7.15), имеет вид:

$$(\overline{x} - \varepsilon;\ \overline{x} + \varepsilon) = (0,92 - 0,364;\ 0,92 + 0,364) = (0,556;\ 1,284) .$$

Доверительный интервал для параметра σ*:*

1. По таблице распределения χ_n^2 (см. табл. П.3) для числа степеней свободы $m = n - 1 = 49$ и для

$$\alpha_1 = \frac{1+\beta}{2} = 0,995 \text{ и } \alpha_2 = \frac{1-\beta}{2} = 0,005$$

вычисляются:

$$\gamma_1 = \chi^2_{\alpha_1, m} = 27,249 \text{ и } \gamma_2 = \chi^2_{\alpha_2, m} = 78,231 .$$

2. Построенный по формуле (7.18) доверительный интервал для параметра σ нормального распределения имеет вид:

$$\left(\overline{s}\sqrt{\frac{m}{\gamma_2}};\ \overline{s}\sqrt{\frac{m}{\gamma_1}} \right) = \left(1,07 \cdot \sqrt{\frac{49}{78,231}};\ 1,07 \cdot \sqrt{\frac{49}{27,249}} \right) = (0,839;\ 1,421) .$$

7.5. Пример выполнения лабораторной работы "Проверка статистических гипотез и интервальные оценки" в среде Mathcad

Цель лабораторной работы — выяснить, можно ли принять выдвинутую в предыдущей лабораторной работе *(см. разд. 6.3)* гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности, используя критерии Пирсона и Колмогорова, а также получить интервальные оценки параметров распределения.

Проверка нулевой гипотезы по критерию Пирсона

1. Вычисляются вероятности p_i — вероятности попадания генеральной совокупности X в каждый из интервалов статистического ряда с помощью функции Лапласа по формулам:

$$p_i = P\{\, a_{i+1} \le X \le a_i \,\} = \Phi\left(\frac{a_{i+1} - \overline{x}}{\overline{s}} \right) - \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x}}{\overline{s}} \right). \tag{7.19}$$

На рис. 7.9 представлено содержимое окна приложения Mathcad, где формируется вектор **pt** — вектор вероятностей p_i, а границы интервалов статистического ряда задаются вектором **int**1. Вероятности в формуле (7.19) вычисляются с помощью встроенной функции распределения нормального закона pnorm(**int**1, a, σ), в которой в качестве параметров распределения взяты их точечные оценки: $a = \overline{x} = 0{,}902$, $\sigma = \overline{s} = 1{,}094$. На этом же рисунке вычислен вектор **pt**1 — вектор значений $p_i \cdot n$.

$$i := 1..6$$

$$pt_i := \mathrm{pnorm}\left(int1_{i+1}, 0.902, 1.094\right) - \mathrm{pnorm}\left(int1_i, 0.902, 1.094\right)$$

$$pt1 := pt \cdot n$$

$$pt = \begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.19 \\ 0.268 \\ 0.238 \\ 0.132 \\ 0.046 \end{pmatrix} \qquad pt1 = \begin{pmatrix} 4.247 \\ 9.514 \\ 13.404 \\ 11.879 \\ 6.622 \\ 2.32 \end{pmatrix}$$

Рис. 7.9

2. На рис. 7.10 показано вычисление статистики $\chi^2_{\text{набл}}$ критерия Пирсона по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \tag{7.20}$$

Для этого выделяется второй столбец матрицы **F** (см. рис. 6.10) — вектор **pn** — вектор количества выборочных значений n_i в каждом интервале статистического ряда. Вектор **pt**1 — вектор значений $p_i \cdot n$ (теоретических частот), $i = 1, 2, ..., 6$. Вектор **ptx** — вектор квадратичных невязок — слагаемых в сумме для статистики $\chi^2_{\text{набл}}$, вычисляемой по формуле (7.20).

Статистика $\chi^2_{\text{набл}}$ критерия Пирсона вычислена оператором суммирования Σ элементов вектора **ptx**, который находится на панели **Матрицы** (Matrix).

На этом же рисунке показано, как вычисляется граница критической области $\chi^2_{\text{кр}}$ через встроенную функцию qchisq(β, m), где β — заданная вероятность, m — число степеней свободы. Вероятность β выбрана равной 0,99, соответствующей уровню значимости $\alpha = 0{,}01$, а число степеней свободы $m = l - 1 - r = 6 - 1 - 2 = 3$.

Поскольку $\chi^2_{\text{набл}} = 10{,}13$ меньше $\chi^2_{\text{кр}} = 11{,}345$, то основная гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

$$pn := f^{\langle 2 \rangle} \qquad ptx := \frac{(pn - pt1)^2}{pt1}$$

$$pn = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 20 \\ 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad ptx = \begin{pmatrix} 0.724 \\ 0.664 \\ 3.246 \\ 2.004 \\ 0.397 \\ 3.094 \end{pmatrix}$$

Наблюдаемое значение статистики критерия Пирсона

$$\sum ptx = 10.13$$

Граница критической области

$$\mathrm{qchisq}(0.99, 3) = 11.345$$

Рис. 7.10. Вычисление статистики Пирсона

Проверка нулевой гипотезы по критерию Колмогорова

Вычисляется статистика критерия Колмогорова

$$\zeta_{\text{К}} = \sqrt{n} \max_x \left| F_n^*(x) - F_0(x) \right| \tag{7.21}$$

в граничных точках интервального ряда — вектор **int**1, вычисленный в предыдущей лабораторной работе (см. рис. 6.11).

На рис. 7.11 показано вычисление статистики критерия Колмогорова по формуле (7.21). Для этого в граничных точках интервального ряда вычисляются значения функции femp(z) — значения эмпирической функции распределения, вычисленной ранее (см. рис. 6.14).

На этом же рисунке показано вычисление значений функции распределения нормального закона — вектор **po**, через встроенную функцию pnorm(x, a, σ). Затем вычисляется вектор **pm** — вектор модулей разностей значений функций распределения — эмпирической $F_n^*(x)$ и гипотетической $F_0(x)$. Для определения максимального значения проводится его упорядочение по возрастанию через встроенную функцию sort(**pm**). Ясно, что у полученного вектора **pp** максимальным элементом является pp_7.

Для заданного уровня значимости $q = 0,01$ из таблицы распределения Колмогорова (см. табл. П.4) определяется граница односторонней критической области $\lambda_q = 1,627$. Поскольку вычисленное значение статистики Колмогорова $\zeta_{\text{К}} = 0,624 < \lambda_q = 1,627$, то можно принять гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

$$i := 1..7$$

$$\mathrm{femp}\left(int1_i\right) \qquad po_i := \mathrm{pnorm}\left(int1_i, 0.902, 1.094\right) \qquad pv_i := \mathrm{femp}\left(int1_i\right)$$

0
0.12
0.26
0.66
0.8
0.9
1

$$po = \begin{pmatrix} 0.029 \\ 0.113 \\ 0.304 \\ 0.572 \\ 0.809 \\ 0.942 \\ 0.988 \end{pmatrix} \qquad pm_i := \left|pv_i - po_i\right| \qquad pp := \mathrm{sort}(pm) \qquad pp = \begin{pmatrix} 6.555\times 10^{-3} \\ 9.4\times 10^{-3} \\ 0.012 \\ 0.029 \\ 0.042 \\ 0.044 \\ 0.088 \end{pmatrix}$$

$$\zeta k := \sqrt{n}\cdot pp_7 \qquad \zeta k = 0.624$$

Рис. 7.11. Вычисление статистики Колмогорова

Интервальные оценки параметров распределения

Доверительный интервал для математического ожидания

На рис. 7.12 представлено содержимое окна приложения Mathcad, где вычисляется доверительный интервал для математического ожидания. По заданной надежности $\beta = 0{,}99$ и по числу степеней свободы $n-1$, где $n = 50$ (объем выборки), вычисляется граница критической области $t\beta$ — квантиль уровня 0,99 распределения Стьюдента через встроенную функцию $\mathrm{qt}(\beta, n-1)$.

Доверительный интервал для математического ожидания

Надежность $\beta := 0.99$

Граница критической области $t\beta := \mathrm{qt}(\beta, n-1) \quad t\beta = 2.405$

Точность $\quad eps := t\beta\cdot\dfrac{\mathrm{stdev}(x)}{\sqrt{n-1}} \quad eps = 0.372$

Границы доверительного интервала

$$a1 := \mathrm{mean}(x) - eps \qquad a2 := \mathrm{mean}(x) + eps$$

$$a1 = 0.53 \qquad a2 = 1.274$$

Рис. 7.12

Границы доверительного интервала вычисляются по формуле (7.15) в виде:

$$\left(\overline{x} - t\beta\cdot\frac{s}{\sqrt{n-1}}; \overline{x} + t\beta\cdot\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right),$$

где $\bar{x}$ и s — среднее выборочное и выборочное среднеквадратическое отклонение. Эти значения вычисляются через встроенные функции Mathcad — mean(x) и stdev(x) — СКВО (не исправленное). На рисунке показаны вычисленные границы интервала, т. е.

$$a1 = \bar{x} - t\beta \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} \text{ и } a2 = \bar{x} + t\beta \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}.$$

Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения

На рис. 7.13 показано вычисление доверительного интервала для среднеквадратического отклонения. По заданной доверительной вероятности $\beta = 0,99$ вычисляются критические точки распределения χ^2 — границы двусторонней критической области γ_1 и γ_2. Для вычисления границ критической области используется встроенная функция qchisq(p, $n-1$), где $1-p$ — вероятность попадания в соответствующую часть критической области ($p = 1-\alpha 1$ и $p = 1-\alpha 2$), $n-1$ — число степеней свободы, n — объем выборки.

Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения

Надежность $\beta := 0.99$

Двусторонняя критическая область

$$\alpha 1 := \frac{1+\beta}{2} \qquad \alpha 2 := \frac{1-\beta}{2} \qquad \alpha 1 = 0.995 \qquad \alpha 2 = 5 \times 10^{-3}$$

Критические точки распределения χ^2

$$\gamma 1 := \mathrm{qchisq}(1-\alpha 1, n-1) \qquad \gamma 2 := \mathrm{qchisq}(1-\alpha 2, n-1)$$

$$\gamma 1 = 27.249 \qquad \gamma 2 = 78.231$$

Границы доверительного интервала

$$\sigma 1 := \mathrm{Stdev}(x) \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\gamma 2}} \qquad \sigma 2 := \mathrm{Stdev}(x) \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\gamma 1}}$$

$$\sigma 1 = 0.866 \qquad \sigma 2 = 1.468$$

Рис. 7.13

Границы доверительного интервала вычисляются по формуле (2.14)

$$\left(\bar{s}\sqrt{\frac{n-1}{\gamma_2}}; \bar{s}\sqrt{\frac{n-1}{\gamma_1}} \right),$$

где γ_1 и γ_2 — границы двусторонней критической области; $\bar{s}$ — исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение.

7.6. Варианты заданий для лабораторных работ

Вариант 1

10,1	–4,3	–2,2	10,6	8,9	9,4	16,6	7,3	4,7	–2,7
15,2	17,1	–4,5	8,2	15,2	6,2	19,7	11,5	1,3	15,5
4,5	8,8	9,8	13,8	4,0	4,7	4,7	8,1	–3,1	14,8
13,5	20,1	12,0	7,4	8,3	6,7	–0,6	18,5	7,0	16,5
6,5	9,4	2,6	3,3	6,8	4,7	7,9	–1,0	6,6	17,2

Вариант 2

14,8	1,8	16,8	15,1	3,2	–4,6	10,5	10,6	16,0	11,2
6,9	7,0	14,2	15,7	9,5	2,7	0,4	9,4	1,0	15,8
14,4	6,4	1,3	11,8	6,4	11,9	21,7	1,2	6,2	1,6
1,9	3,5	4,3	0,3	–2,2	7,8	-0,9	15,4	5,3	15,6
5,2	14,3	11,3	12,0	7,6	4,7	12,3	4,0	8,2	12,3

Вариант 3

10,4	5,5	9,9	3,9	0,5	7,0	18,5	10,8	9,9	14,9
3,0	8,5	6,9	2,0	22,1	0,3	6,5	12,1	–1,8	3,8
6,6	4,3	6,9	12,2	11,5	5,5	6,0	14,7	4,1	27,3
16,4	9,7	21,9	9,6	10,7	9,6	3,8	–1,2	13,6	1,0
3,0	6,5	19,4	12,2	6,5	7,6	11,3	12,3	7,5	13,9

Вариант 4

3,3	9,9	7,3	18,6	8,9	9,8	12,6	1,6	5,8	10,9
10,0	18,8	–10,8	11,7	11,1	13,5	6,5	2,3	11,5	14,6
8,0	9,1	6,1	7,7	6,1	6,6	9,1	8,1	4,4	1,9
11,7	9,0	4,2	7,2	–2,2	5,9	13,6	5,3	3,9	8,0
3,8	5,9	23,5	8,3	16,3	11,2	4,2	12,0	8,5	12,1

Вариант 5

13,4	6,0	5,4	12,5	6,3	6,7	0,4	–1,0	11,2	19,3
14,9	13,4	1,3	18,1	0,5	7,7	6,0	10,2	8,3	11,6
5,9	14,2	2,3	6,9	17,8	3,5	2,2	8,4	14,5	4,8
3,1	10,9	7,6	6,6	5,1	–0,7	–9,8	4,1	17,5	4,2
7,3	0,8	14,9	9,7	1,6	7,0	–4,2	–9,2	–4,5	–5,0

Вариант 6

7,2	5,8	0,9	–5,8	7,1	6,6	8,7	–0,3	12,2	15,8
7,7	10,6	15,7	9,8	5,4	13,3	6,1	10,1	8,5	10,1
16,9	13,1	13,1	12,6	16,8	11,2	13,6	5,1	2,8	4,5
–1,9	9,5	–0,9	12,3	7,8	17,9	21,6	0,0	0,7	9,5
5,6	7,1	15,3	11,6	16,0	–3,4	17,1	–1,0	10,3	15,7

Вариант 7

–1,4	3,9	13,8	–3,6	13,7	–0,3	6,4	8,5	8,7	14,7
7,6	7,5	18,4	14,3	1,9	7,2	–1,7	1,5	9,7	1,7
12,3	8,4	–1,7	8,4	16,9	13,9	7,7	11,6	3,6	4,2
3,3	8,8	5,4	17,5	13,4	18,5	1,9	6,9	4,8	6,2
6,2	2,1	4,9	6,5	1,0	10,6	3,2	10,0	17,6	9,0

Вариант 8

5,3	5,6	–1,4	2,7	10,7	–3,9	12,6	18,1	–0,7	6,1
2,1	2,8	–1,7	12,5	11,6	19,2	–1,1	6,6	11,4	9,6
8,6	4,4	13,0	10,2	10,8	16,7	6,2	–0,2	3,2	4,0
19,9	7,4	–3,7	14,0	10,5	7,0	12,6	1,7	4,1	8,8
6,9	–0,2	1,0	14,7	14,7	3,9	2,8	22,9	7,9	5,2

Вариант 9

9,0	–5,5	3,6	–0,8	–0,1	14,3	5,7	3,9	9,1	8,4
7,1	1,3	17,4	12,6	4,4	15,7	12,7	–1,6	5,5	–1,1
–5,4	11,2	15,2	9,3	4,0	15,2	11,9	6,4	12,9	15,7
–0,5	6,4	5,5	25,1	8,0	2,0	6,4	6,6	9,9	7,0
8,0	11,4	9,2	10,8	2,1	3,3	8,6	10,8	11,2	7,5

Вариант 10

12,5	11,5	2,3	–7,1	2,1	8,0	3,0	–1,9	16,0	14,0
14,7	12,2	5,3	16,9	9,8	3,9	3,8	5,2	4,5	1,0
21,4	22,1	6,8	9,7	11,2	9,7	4,5	12,8	3,4	–5,1
15,5	6,3	4,4	10,5	6,3	–1,0	6,0	2,2	19,8	7,8
–0,7	9,6	11,1	3,9	18,5	11,1	7,3	15,4	0,0	9,5

Вариант 11

4,5	–0,6	9,6	10,5	15,2	9,3	4,5	9,2	11,9	17,1
4,6	18,3	12,6	4,7	12,9	13,1	14,4	26,3	7,6	7,5
6,8	12,2	10,4	2,6	7,7	12,5	7,2	17,9	11,3	10,3
11,9	8,6	15,6	–0,5	11,1	3,0	9,7	–1,1	12,0	13,0
4,1	13,1	9,3	17,8	6,5	14,3	3,6	17,6	9,3	13,3

Вариант 12

1,01	0,98	1,10	0,07	0,96	0,28	0,06	0,048	1,11	0,33
0,03	0,32	0,80	0,62	0,13	1,56	0,31	0,954	0,26	0,30
0,48	0,54	0,31	0,03	0,55	0,99	0,33	0.274	1,77	0,79
0,06	0,19	0,55	0,06	0,56	0,61	0,17	0,178	0,95	0,23
0,59	1,30	0,94	0,25	0,22	1,49	2,11	0,694	1,14	1,58

Вариант 13

3,0	12,6	18,3	12,6	8,1	6,1	1,7	8,2	7,1	16,0
4,6	12,3	3,1	9,8	8,2	14,3	22,8	15,8	4,3	2,4
–0,7	1,4	5,6	–1,0	12,0	18,9	10,5	10,6	6,7	3,1
3,4	1,4	9,2	18,5	5,7	0,4	–2,0	2,4	10,5	14,2
–0,2	3,8	14,9	–4,2	14,5	14,0	17,5	5,7	16,1	10,0

Вариант 14

–5,4	14,3	2,6	12,2	7,4	3,9	4,7	2,2	4,7	14,1
5,2	3,1	15,6	6,5	13,5	6,3	15,0	3,7	15,9	8,1
14,3	20,3	12,7	4,6	1,8	9,4	2,6	1,6	2,4	7,0
13,6	18,6	10,8	8,1	6,2	4,5	14,1	7,2	–4,0	13,6
4,2	8,6	–3,1	12,7	13,7	6,0	8,6	11,0	9,4	2,8

Вариант 15

7,3	2,1	22,1	3,2	4,3	17,9	13,6	7,8	–7,0	6,1
10,7	7,8	10,6	8,1	9,8	8,9	15,5	14,1	6,6	4,1
4,1	8,7	6,0	9,6	–8,8	6,7	1,5	3,0	6,8	12,4
9,2	7,3	12,5	15,7	–0,7	15,5	16,8	4,3	9,6	–4,9
8,8	–4,2	12,3	7,2	1,0	0,3	–0,1	18,5	8,8	8,1

Вариант 16

3,0	7,8	0,7	2,4	9,5	11,8	14,3	1,8	1,1	10,1
1,1	–1,3	1,5	7,9	7,7	7,8	12,8	10,9	11,7	7,0
–0,3	9,7	17,0	10,9	7,0	3,1	4,3	0,9	6,3	14,1
–0,2	13,2	15,2	10,7	7,6	6,3	13,8	0,2	7,5	8,8
2,9	8,1	6,7	0,8	8,1	–9,2	8,2	7,9	17,3	2,4

Вариант 17

0,7	0,5	0,4	0,6	0,3	1,4	1,4	0,6	1,9	2,0
0,1	0,1	1,2	0,7	0,4	0,7	0,4	0,1	0,4	0,5
1,4	0,5	1,2	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,3	0,3
0,1	0,3	0,3	1,0	1,1	1,9	0,1	1,5	1,1	0,4
0,5	0,7	0,6	1,5	0,2	0,2	0,1	1,0	1,7	0,1

Вариант 18

0,11	0,12	0.14	0,77	1,00	0,26	0,11	0,13	0,33	1,00
0,59	0,39	0,52	0,24	0,27	0,17	0,30	0,06	0,16	0,98
0,05	0,39	1,21	0,31	1,16	0,05	0,30	0,16	0,04	0,17
0,08	0,18	0,19	0,13	1,53	0,36	0,09	0,05	0,11	0,04
0,21	0,08	0,54	0,07	0,05	0,15	0,16	0,46	0,08	0,11

Вариант 19

4,9	11,5	14,7	5,6	6,0	12,5	–2,0	7,6	13,6	4,9
8,6	7,8	–0,4	6,0	11,9	20,6	7,6	–4,2	15,1	9,2
11,2	–4,2	8,3	9,5	5,6	8,5	–0,6	8,6	–0,1	6,9
8,5	1,9	0,5	6,4	11,8	9,6	3,6	7,7	7,1	8,8
4,7	3,3	7,9	10,1	5,9	–8,7	5,1	2,3	2,9	16,1

Вариант 20

5,8	2,4	–3,3	0,5	14,0	9,8	3,5	5,8	4,3	10,1
9,6	15,9	10,9	15,2	6,0	–1,0	13,8	8,1	7,8	4,9
12,8	5,7	9,5	8,9	9,3	4,6	12,6	2,2	–0,6	11,0
9,3	12,3	13,6	14,9	8,5	0,1	6,0	7,8	6,5	–0,2
8,7	10,0	8,5	2,4	2,9	14,5	9,0	2,8	–0,6	9,5

Вариант 21

0,19	1,05	0,17	0,90	0,59	0,03	0,16	0,28	0,28	0,27
0,15	0,20	2,05	0,92	0,06	0,12	0,39	0,02	0,69	0,81
0,02	1,43	1,15	0,81	0,06	0.13	0,69	0,14	0,61	0,71
0,43	0,40	0,09	0,26	0,09	0,77	0,36	0,80	1,09	0,22
0,24	0,47	0,08	0,50	0,04	0,12	0,41	0,59	0,59	0,28

Вариант 22

16,8	2,6	11,6	2,7	18,7	6,4	10,5	2,7	–1,3	4,0
4,8	10,7	5,9	4,9	9,4	8,4	7,3	9,8	5,5	12,6
7,1	10,8	3,1	10,2	9,4	9,4	10,4	14,5	12,5	15,1
3,8	16,9	8,3	6,9	6,0	19,9	18,3	12,8	21,5	12,4
7,0	8,1	4,7	11,9	–2,3	9,2	18,2	7,1	16,7	11,4

Вариант 23

12,7	15,0	4,9	3,4	6,6	21,8	6,6	6,0	4,1	9,1
5,7	4,2	19,5	7,1	16,4	6,5	–3,1	16,2	6,7	8,4
11,3	–5,7	12,6	6,1	10,3	14,6	15,9	14,6	12,5	0,8
0,8	13,2	14,0	6,4	5,5	7,5	6,5	8,6	–1,7	14,7
7,5	12,1	8,0	4,9	10,2	4,7	2,9	15,7	–3,3	15,0

Вариант 24

0,02	0,20	0.192	0.22	0,01	0,04	0,07	0,05	0,06	0,10
0,19	0,13	0,03	0,011	0,10	0,08	0,05	0.33	0.04	0,15
0,12	0,49	0,01	0,09	0,18	0,03	0,26	0,54	0,32	0,27
0,04	0,45	0,36	0,10	0,08	0,14	0,20	0,23	0,02	0,03
0,04	0,08	0,09	0,30	0,27	0,26	0,16	0,24	0,18	0,29

Вариант 25

2,4	2,7	21,2	–0,6	14,2	7,9	17,4	3,1	13,0	9,8
9,6	2,7	10,8	4,7	4,5	2,8	3,3	–0,2	6,7	15,2
16,1	8,7	14,6	11,6	12,4	20,5	1,1	7,1	7,8	1,3
22,0	1,5	12,7	4,9	11,7	16,1	1,4	2,8	4,6	6,4
13,5	24,6	8,2	1,1	6,4	–3,7	–3,4	1,7	8,3	6,6

Вариант 26

12,1	20,0	4,3	10,9	6,5	5,4	–7,0	–0,3	7,5	2,2
18,5	–0,4	1,2	9,0	9,1	14,1	16,1	5,9	10,3	8,8
–5,6	4,3	9,6	12,5	12,9	8,8	–0,8	12,4	7,1	2,5
1,5	17,0	5,5	12,4	23,0	17,8	3,3	6,3	4,5	14,5
8,2	7,7	16,2	11,5	0,0	14,4	11,1	17,7	13,0	3,0

Вариант 27

10,1	5,0	–4,8	–0,9	15,5	7,7	–3,9	7,8	4,5	7,5
6,0	5,3	11,8	4,6	20,2	5,8	14,6	15,4	4,2	–0,3
6,5	14,4	9,6	7,5	9,6	5,5	2,6	8,7	1,8	9,5
–6,2	8,0	7,2	–2,3	5,7	6,4	–2,7	3,7	7,4	4,3
–2,4	10,8	11,8	10,2	2,4	14,9	3,8	2,7	6,5	8,0

Вариант 28

0,04	0,16	0,28	0,16	0,07	0,01	0,05	0,38	0,61	0,49
0,17	0,29	0,24	0,14	0,06	0,30	0,05	0,21	0,29	0.11
0,07	0,07	0,18	0,02	0,27	0,55	0,08	0,39	0,13	0,04
0,07	0,08	0,23	0,25	0,16	0,03	0,02	0,12	0,44	0,17
0,22	0,18	0,02	0,02	0,08	0,12	0,03	0,51	0,35	0,46

Вариант 29

2,4	10,7	0,4	15,0	6,7	10,3	10,0	7,7	6,4	3,4
12,0	7,1	1,3	8,7	17,1	21,0	6,0	10,0	–6,0	11,2
11,4	–2,9	9,2	5,0	20,9	27,9	6,5	10,0	12,8	12,4
18,8	–0,8	16,4	9,8	–3,9	–2,2	7,9	7,7	6,8	11,6
7,9	8,1	16,2	9,4	9,9	9,2	6,0	–0,9	0,3	–0,4

Вариант 30

4,9	8,4	14,5	8,6	16,0	14,1	10,7	6,3	12,6	1,1
11,7	14,7	4,7	15,2	23,7	0,3	10,4	5,6	13,1	8,0
11,5	–0,7	9,9	11,9	13,4	9,7	11,4	13,5	0,1	9,1
8,7	18,6	7,2	–5,4	3,3	8,3	7,8	9,7	10,0	7,3
10,8	6,9	13,4	10,1	0,1	11,4	–2,7	9,0	14,4	12,1

ГЛАВА 8

Основы теории случайных процессов

В процессе развития теории вероятности как науки можно условно выделить три этапа, первый из которых связан с понятием случайного события, второй — с понятием случайной величины, а третий — с понятием случайной функции (случайного процесса).

Теория случайных процессов разрабатывалась в связи с необходимостью строить математические модели для реальных процессов, меняющихся в зависимости от времени, и состояние которых в каждый фиксированный момент времени характеризуется случайным вектором соответствующей размерности.

8.1. Основные понятия и определения

Случайная функция (случайный процесс). Сечение и траектория случайного процесса

Следует понимать, что случайный процесс (так же как случайный вектор и случайная величина) всегда связан с осуществлением некоторого комплекса условий — экспериментом (испытанием), который может быть повторен многократно. Каждое повторение испытания характеризуется своим исходом (элементарным событием) ω.

Определение 8.1. Пусть $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ — вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента, $\omega \in \Omega$ — элементарное событие, а $T \subset R$ — некоторое числовое множество. *Случайной функцией* $X(\omega, t)$, заданной на множестве $\Omega \times T$, называется функция двух переменных $\omega \in \Omega$ и $t \in T$. Если переменная t — время и предполагается $t \geq 0$, то функция $X(\omega, t)$ называется *случайным процессом*).

Замечание 1

Из определения 1 следует, что случайная функция (случайный процесс) есть отображение: $\Omega \xrightarrow{X(\omega, t)} R$, зависящее от параметра t. Такой случайный процесс называют *скалярным случайным процессом*.

Замечание 2

В настоящем курсе мы будем рассматривать только случайные процессы. В дальнейшем, как и при обозначении случайных величин, зависимость от переменной ω в обозначении случайного процесса мы будем опускать и записывать: $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ и т. д.

Определение 8.2. При каждом фиксированном $t = t_0$ случайный процесс (скалярный) представляет собой случайную величину $X(\omega)$, которая называется *сечением случайного процесса.*

Определение 8.3. *Реализацией (траекторией)* случайного процесса (скалярного) $X(t)$ называется числовая функция вещественной переменной t, которая получается при фиксированном $\omega = \omega_0 \in \Omega$, т. е. при конкретном исходе случайного эксперимента. Различные реализации случайного процесса будем обозначать $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ и т. д., при этом совокупность всех реализаций образует *ансамбль реализаций.*

Задача 8.1. Функция $X(t) = Vt + 5$, где V — дискретная случайная величина, заданная на множестве исходов некоторого случайного эксперимента рядом распределения (табл. 8.1), является случайным процессом.

Таблица 8.1

V	–2	0	1	Σ
P	0,45	0,2	0,35	1

Найти сечение случайного процесса при $t = 2$ и траектории случайного процесса при всех возможных значениях случайной величины V.

Решение. Сечением этого случайного процесса при $t = 2$ является случайная величина $X = 2V + 5$. Эта случайная величина — дискретная и принимает значения $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ и $x_3 = 7$ с вероятностями, равными вероятностям, с которыми случайная величина V принимает значения $v_1 = -2$, $v_2 = 0$ и $v_3 = 1$.

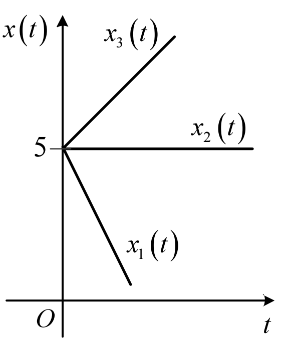

Рис. 8.1

Реализациями (траекториями) этого случайного процесса будут лучи: $x_1(t) = -2t + 5$, $x_2(t) = 5$ и $x_3(t) = t + 5$, $t \geq 0$ (рис. 8.1).

Задача 8.2. Пусть $X(t) = V\cos t$ — случайный процесс, где V — непрерывная случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $a = 2$ и $\sigma = 1$. Найти закон распределения сечения этого случайного процесса при любом фиксированном значении t и при $t=\pi$, а также построить графики реализаций случайного процесса при значениях случайной величины $v_1=1$, $v_2=2$, $v_3=3$.

Решение. Закон распределения нормальной случайной величины V с параметрами $a=2$ и $\sigma=1$ может быть задан плотностью распределения

$$f_V(v,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(v-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(v-2)^2}{2}}.$$

Поскольку v и x — значения случайных величин V и $X(t)$ (при фиксированном t), которые связаны соотношениями

$$x=v\cdot\cos t,\ v=\frac{x}{\cos t},$$

то

$$f_{X(t)}(x,t)=f_V\left(\frac{x}{\cos t},t\right)\cdot\left|\left(v(x)\right)'_x\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{x}{\cos t}-2\right)^2}{2}}\cdot\left|\frac{1}{\cos t}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left|\cos t\right|}e^{-\frac{(x-2\cos t)^2}{2\cos^2 t}}.$$

Следовательно, каждое сечение заданного случайного процесса — это нормально распределенная случайная величина с параметрами $(2\cos t, |\cos t|)$. Закон распределения этой случайной величины, заданной ее плотностью, имеет вид:

$$f_{X(t)}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left|\cos t\right|}e^{-\frac{(x-2\cos t)^2}{2\cos^2 t}},\ t\geq 0.$$

При $t=\pi$ закон распределения соответствующего сечения случайного процесса задается плотностью

$$f_{X(\pi)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}.$$

Если предположить, что при $\omega_1,\omega_2,\omega_3\in\Omega$ случайная величина V принимает значения $v_1=1$, $v_2=2$ и $v_3=3$, то реализациями данного случайного процесса будут функции переменной t: $x_1(t)=\cos t$, $x_2(t)=2\cos t$ и $x_3(t)=3\cos t$, $t\geq 0$ (рис. 8.2).

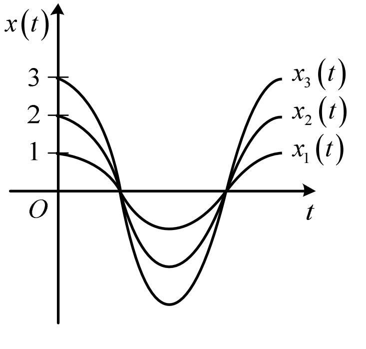

Рис. 8.2

Задача 8.3. Задан случайный процесс $X(t)=2t\cdot V+3$, где V — непрерывная случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;1]$. Описать множество сечений и реализаций случайного процесса.

Решение. Реализациями случайного процесса при исходе случайного эксперимента ω являются лучи $x(t)=2v(\omega)\cdot t+3$, $t\geq 0$, со случайным угловым коэффициентом $k=2v(\omega)$, исходящие из точки $(0;3)$ (рис. 8.3). Поскольку случайная величина V распределена на отрезке $[0;1]$, то $0 \le k \le 2$, а лучи заключены в секторе между лучами $x(t)=3$ и $x(t)=2t+3$, $t \ge 0$.

При любом фиксированном $t = t_0 \ge 0$ случайная величина имеет вид: $X(\omega, t_0) = 2t_0 \cdot V(\omega) + 3$. Закон распределения равномерной на $[0;1]$ случайной величины $V(\omega)$ может быть задан плотностью распределения

$$f_V(v) = \begin{cases} 1, & v \in [0;1]; \\ 0, & v \notin [0;1], \end{cases}$$

где v — значения случайной величины $V(\omega)$. Обозначая значения случайных величин $X(\omega, t_0)$ и $V(\omega)$, соответствующие исходу ω, через x и v, получим:

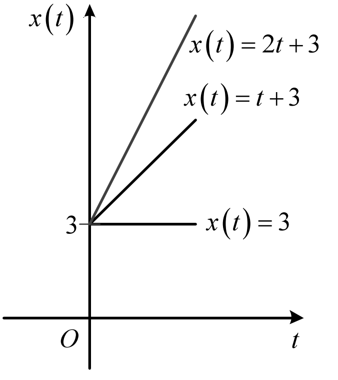

Рис. 8.3

$$x = 2t_0 \cdot v + 3 = \varphi(v) \Rightarrow v = \frac{x-3}{2t_0} = \psi(x).$$

Тогда, учитывая, что $t_0 \ge 0$ и функция φ возрастающая, по формуле (5.8) можно найти плотность распределения сечения $X(\omega, t_0)$:

$$f_X(x) = f_V(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = f_V\left(\frac{x-3}{2t_0}\right) \cdot \frac{1}{2t_0}.$$

Поэтому

$$f_{X(\omega,t_0)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2t_0}, & x \in [3; 3+t_0]; \\ 0, & x \notin [3; 3+t_0], \end{cases}$$

или при любом $t \ge 0$

$$f_X(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2t}, & x \in [3; 3+t]; \\ 0, & x \notin [3; 3+t]. \end{cases}$$

Следовательно, каждое сечение случайного процесса при фиксированном $t \ge 0$ распределено равномерно на отрезке $[3; 3+t]$ (рис. 8.4).

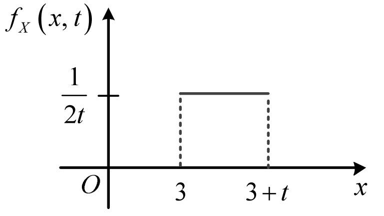

Рис. 8.4

Определение 8.4. Отображение $\Omega \xrightarrow{X(\omega,t)} R^n$, зависящее от параметра t, называют *векторным* или n*-мерным* случайным процессом. Векторный случайный процесс можно записать в виде:

$$X(\omega,t)=\left(X_1(\omega,t)\;\; X_2(\omega,t)\;\; \ldots\;\; X_n(\omega,t)\right)^T,$$

где $X_n(\omega,t)$ — скалярные случайные процессы, которые называются *координатными случайными процессами.*

Замечание 1

Очевидно, что каждое сечение векторного случайного процесса является случайным вектором $X(\omega)=\left(X_1(\omega)\;\; X_2(\omega)\;\; \ldots\;\; X_n(\omega)\right)^T$.

Замечание 2

Если зафиксировать некоторый исход $\omega\in\Omega$, то векторный случайный процесс представляет собой детерминированную функцию n переменных $X(t)= = X(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ и проявляет себя в виде траектории в n-мерном пространстве R^n.

Случайные процессы можно классифицировать по характеру изменения времени и по типу сечений. Можно указать четыре типа случайных процессов:

- случайные процессы с дискретным временем и с дискретными сечениями;
- с дискретным временем и с непрерывными сечениями;
- с непрерывным временем и с дискретными сечениями;
- случайные процессы с непрерывным временем и с непрерывными сечениями.

Случайный процесс $X(t)$, где $t\in T$, в зависимости от вида множества T является:

- случайной величиной $X(\omega,t_0)=X(\omega)=X$, если $T=\{t_0\}$ — множество, состоящее из одного числа;
- n-мерным случайным вектором $\left(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\right)^T$, если $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ — дискретное конечное множество;
- бесконечномерным случайным вектором $\left(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n), \ldots\right)^T$, если $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ — дискретное счетное множество;
- случайным процессом с непрерывным временем, если $T=[0;+\infty)$, и тогда его можно рассматривать как семейство непрерывных случайных величин, закон распределения которых зависит от времени t как от параметра.

Конечномерные распределения случайного процесса

Поскольку сечением каждого случайного процесса является случайная величина, то весь случайный процесс характеризуется распределением его сечений.

Определение 8.5. *Одномерным законом распределения* случайного процесса $X(t,\omega)$ называется закон распределения некоторого сечения $X(\omega)$ этого случайного процесса.

При этом:

- если сечение $X(\omega)$ — дискретная случайная величина, то закон распределения может быть задан рядом распределения (см. задачу 8.1);
- если сечение случайного процесса — непрерывная случайная величина, то одномерный закон распределения может быть задан плотностью $f_X(x,t)$, которая является функцией двух переменных (см. задачи 8.2, 8.3).

Для одномерной плотности распределения $f(x,t)$ справедливы следующие свойства:

- $f_X(x,t) \geq 0$;
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x,t)dx = 1$, $\forall t \in R$.

Замечание 1

Одномерный закон распределения сечения X случайного процесса $X(t)$ может быть задан также функцией распределения случайной величины X, которая будет функцией двух переменных $F_X(x,t)$ и представлять при любых $x, t_0 \in R$ вероятность события $\{X(t_0) < x\}$, т. е.

$$F_{X(t_0)}(x) = P\{X(t_0) < x\} = P\{\omega \in \Omega : X(\omega, t_0) < x\}.$$

Замечание 2

Функция $F_X(x,t)$ называется *одномерной функцией распределения случайного процесса*. Для нее справедливы все свойства функции распределения случайной величины. Она связана с одномерной плотностью распределения соотношениями:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u,t)du = F_X(x,t), \ \forall x \in R, \ \forall t \in R,$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_X(x,t)\right) = f_X(x,t), \ \forall x \in R, \ \forall t \in R.$$

Одномерные распределения сечений не всегда достаточно полно характеризуют случайный процесс. Функция $F_X(x,t_0)$ дает распределение случайной величины $X(t_0)$ при любом $t_0 \in T$, но она не несет информации о совместном распределении случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Поэтому приходится рассматривать законы совместного распределения "двумерных" и "многомерных" сечений. Например, при $t = t_1, t_2, ..., t_n$ получим совместную функцию распределения n "одномерных" сечений:

$$F_{X(t_1),X(t_2),...,X(t_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, ..., X(t_n) < x_n\}. \quad (8.1)$$

Все распределения (8.1) называют *семейством конечномерных распределений* случайного процесса $X(t)$.

В частности, *двумерным законом распределения* случайного процесса $X(t)$ называется закон распределения двух его сечений: $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Двумерные распределения — это таблицы совместного распределения в дискретном случае или плотности распределения, которые являются функциями четырех переменных, — $f_X(x_1, x_2, t_1, t_2)$.

Случайный процесс считается *заданным*, если заданы все его конечномерные распределения.

Замечание 3

Задачи 8.4 и 8.5 предлагается решить самостоятельно.

Задача 8.4. Случайный процесс задан соотношением $X(t) = t^2 \cdot V$, где случайная величина V распределена по биномиальному закону с параметрами $p = 0{,}5$ и $n = 3$. Найти реализации и сечения заданного случайного процесса.

Задача 8.5. Случайный процесс задан соотношением $X(t) = e^{-t} \cdot V$, где случайная величина V равномерно распределена на отрезке $[0; 2]$. Описать реализации и сечения заданного случайного процесса.

8.2. Числовые характеристики случайного процесса

Математическое ожидание, дисперсия и СКВО случайного процесса

Определение 8.6. *Математическим ожиданием* $m_X(t)$ случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция переменной $t \in T \subset R$, равная в каждый фиксированный момент времени t_0 математическому ожиданию соответствующего сечения $X = X(t_0, \omega)$, т. е. при любом значении t математическое ожидание случайного процесса — это функция переменной t:

$$m_X(t) = M[X(t)].$$

Если в сечении — дискретная случайная величина, принимающая значения

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$$

с вероятностями $p_1(t_0), p_2(t_0), \ldots, p_n(t_0)$, то математическое ожидание случайного процесса определяется формулой

$$m_X(t_0) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_0)\, p_i(t_0),$$

а при любом фиксированном значении t

$$m_X(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\,p_i(t)\,. \tag{8.2}$$

Если в сечении — непрерывная случайная величина, закон распределения которой при фиксированном значении t задан плотностью $f_X(x,t)$, то математическое ожидание случайного процесса находится из соотношения

$$m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_X(x,t)dx\,. \tag{8.3}$$

Замечание

Геометрически математическое ожидание случайного процесса можно истолковать как "среднюю кривую", относительно которой группируются графики различных его реализаций (траекторий).

Для математического ожидания случайного процесса справедливы следующие свойства:

- $M[c(t)]=c(t)$, если $c(t)$ — неслучайная функция;
- $M[a(t)X(t)+b(t)Y(t)]=a(t)m_X(t)+b(t)m_Y(t)$, если $a(t),b(t)$ — неслучайные функции, а $X(t),Y(t)$ — случайные процессы, заданные на одном и том же вероятностном пространстве;
- $|m_X(t)|\le M[|X(t)|]$.

Определение 8.7. Пусть $X(t)$ — случайный процесс, а $m_X(t)$ — его математическое ожидание. Случайный процесс вида

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_X(t)$$

называется *центрированным* случайным процессом. Очевидно, что $M\left[\overset{\circ}{X}(t)\right]=0$ при $\forall t\in T\subset R$.

Определение 8.8. *Дисперсией* $\sigma_X^2(t)$ случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция переменной $t\in T\subset R$, равная в каждый фиксированный момент времени t_0 дисперсии соответствующего сечения $X=X(t_0,\omega)$, т. е. в каждый фиксированный момент времени t

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=M[X(t)-m_X(t)]^2=M\left[\overset{\circ}{X}(t)\right]^2.$$

Для дисперсии более удобна следующая формула:

$$\sigma_X^2(t)=M\left[X^2(t)\right]-m_X^2(t)\,.$$

Если сечение случайного процесса — дискретная случайная величина, принимающая значения

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$$

с вероятностями $p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)$, то дисперсия случайного процесса в каждый фиксированный момент времени t определяется формулой:

$$\sigma_X^2(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) p_i(t) - m_X^2(t). \tag{8.4}$$

Если сечение случайного процесса — непрерывная случайная величина, закон распределения которой задан плотностью $f_X(x,t)$, то дисперсия случайного процесса в каждый фиксированный момент времени t находится из соотношения:

$$\sigma_X^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x,t)dx - m_X^2(t). \tag{8.5}$$

Для дисперсии случайного процесса справедливы следующие свойства:

- ❒ $D[c(t)] = 0$, если $c(t)$ — неслучайная функция;
- ❒ $D[a(t)X(t)] = a^2(t)D[X(t)] = a^2(t)\sigma_X^2(t)$, если $a(t)$ — неслучайная функция;
- ❒ $D[a(t)+X(t)] = D[X(t)] = \sigma_X^2(t)$.

Очевидно, что $D\left[\overset{\circ}{X}(t)\right] = D[X(t)] = \sigma_X^2(t)$ при $\forall t \in T \subset R$.

Определение 8.9. *Среднеквадратическим отклонением* (СКВО) случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $\sigma_X(t)$, определяемая равенством

$$\sigma_X(t) = \sqrt{\sigma_X^2(t)}. \tag{8.6}$$

Задача 8.6. В задаче 8.2 рассматривался случайный процесс $X(t) = V\cos t$, в котором V — непрерывная случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $a = 2$ и $\sigma = 1$. Был найден закон распределения каждого сечения этого СП в виде плотности нормально распределенной случайной величины с параметрами $(2\cos t, |\cos t|)$, т. е.

$$f_{X(t)}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\cos t|} e^{-\frac{(x-2\cos t)^2}{2\cos^2 t}}.$$

Параметры нормальной случайной величины — это ее математическое ожидание и СКВО. Теперь вычислим числовые характеристики этого случайного процесса, используя их свойства:

- ❒ математическое ожидание: $M[X(t)] = M[V]\cdot\cos t = a\cos t = 2\cos t$;
- ❒ дисперсия: $D[X(t)] = D[V]\cos^2 t = \sigma^2\cos^2 t = \cos^2 t$;
- ❒ СКВО: $\sigma_X = |\cos t|$.

Определение 8.10. *Нормированным уклонением* случайного процесса $X(t)$ называется центрированный и нормированный случайный процесс, который обозначается $\overset{\circ}{X}_{н}(t)$ и определяется формулой

$$\overset{\circ}{X}_{н}(t)=\frac{\overset{\circ}{X}(t)}{\sigma_X(t)}=\frac{X(t)-m_X(t)}{\sigma_X(t)}. \tag{8.7}$$

Очевидно, что $D\left[\overset{\circ}{X}_{н}(t)\right]=1$ при $\forall t\in T\subset R$.

Корреляционная функция случайного процесса

Математическое ожидание и дисперсия характеризуют каждое сечение случайного процесса в отдельности. Для того чтобы иметь представление о случайном процессе в целом, рассматривают корреляцию двух его отдельных сечений: $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Если время $t\in T\in R$ меняется непрерывно на промежутке T, то корреляционный момент представляет собой функцию двух переменных, определенную на множестве $T\times T$.

Определение 8.11. *Корреляционной (автокорреляционной) функцией* случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция двух переменных, которую обозначают $K_X(t_1,t_2)$ и которая для любых фиксированных значений $t_1,t_2\in T\in R$ равна корреляционному моменту сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$, т. е.

$$K_X(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_1)\right]=M\left[\left(X(t_1)-m_X(t_1)\right)\left(X(t_2)-m_X(t_2)\right)\right]. \tag{8.8}$$

Если каждое сечение случайного процесса — дискретная случайная величина, принимающая в каждый фиксированный момент времени t значения $x_1,x_2,...,x_n$ с вероятностями $P\left\{X(t_1)=x_i,X(t_2)=x_j\right\}=p_{ij}(t_1,t_2)$, то

$$K_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ix_jp_{ij}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2). \tag{8.9}$$

Если сечение — непрерывная случайная величина, закон распределения которой задан плотностью $f_X(x,t)$, то

$$K_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\,f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2-m_X(t_1)m_X(t_2). \tag{8.10}$$

Определение 8.12. *Нормированной корреляционной функцией* случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция двух переменных, которую обозначают $r_X(t_1,t_2)$ и которая для любых фиксированных значений $t_1,t_2\in T\in R$ равна коэффициенту корреляции сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$, т. е.

$$r_X(t_1,t_2)=\frac{K_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}. \quad (8.11)$$

Для автокорреляционной и нормированной корреляционной функций случайного процесса справедливы свойства, перечисленные в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Автокорреляционная функция	**Нормированная корреляционная функция**
$K_X(t,t)=\sigma_X^2(t)$	$r_X(t,t)=1$
$K_X(t_1,t_2)=K_X(t_2,t_1)$	$r_X(t_1,t_2)=r_X(t_1,t_2)$
$K_{aX+b}(t_1,t_2)=a(t_1)a(t_2)K_X(t_2,t_1)$	$r_{aX+b}(t_1,t_2)=\operatorname{sign}(a(t_1)a(t_2))r_X(t_1,t_2)$
$\lvert K_X(t_1,t_2)\rvert\le\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)$	$\lvert r_X(t_1,t_2)\rvert\le 1$

Определение 8.13. Случайный процесс $X(t)$ называется *элементарным*, если $X(t)=a(t)\cdot V$, где V — случайная величина, а $a(t)\ne 0$ — неслучайная функция.

Теорема 8.1. Если $X(t)=a(t)\cdot V$ — элементарный случайный процесс, то

$$m_X=a(t)M[V],\ \sigma^2{}_X=a^2(t)D[V],\ K_X(t_1,t_2)=a(t_1)a(t_2)D[V],\ \lvert r_X(t_1,t_2)\rvert=1 \quad (8.12)$$

при всех $t_1,t_2\in T$.

Теорема 8.2. Если случайный процесс имеет вид $X(t)=a(t)\cdot V+b(t)$, где V — случайная величина, а $a(t)$ и $b(t)$ — неслучайные функции, то

$$m_X=a(t)M[V]+b(t),\ \sigma^2{}_X=a^2(t)D[V];$$
$$K_X(t_1,t_2)=a(t_1)a(t_2)D[V],\ \lvert r_X(t_1,t_2)\rvert=1 \quad (8.13)$$

при всех $t_1,t_2\in T$.

Задача 8.7. Найти математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию случайного процесса $X(t)=V\cdot t$, если дискретная случайная величина V задана рядом распределения в табл. 8.3.

Таблица 8.3

V	–1	1	2	Σ
P	0,3	0,5	0,2	1

Решение. Случайный процесс является элементарным. Вычислим числовые характеристики случайной величины V, используя табл. 8.3.

$$M[V] = -1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,2 = 0,6\,;$$

$$D[V] = M\left[V^2\right] - \left(M[V]\right)^2 = (-1)^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,2 - 0,6^2 = 1,24\,.$$

Тогда по свойствам математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции имеем:

$$m_X(t) = M\left[X(t)\right] = M[V \cdot t] = t\,M[V] = 0,6t\,;$$

$$\sigma_X^2(t) = D\left[X(t)\right] = D[t \cdot V] = t^2 D[V] = 1,24t^2\,;$$

$$K_{X(t)}(t_1, t_2) = K_{Vt_1 \cdot Vt_2} = t_1 t_2 K_{V,V} = t_1 t_2 D[V] = 1,24 t_1 t_2\,.$$

Замечание

Математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса определяются двумерным распределением процесса, в то время как сам случайный процесс — всем семейством конечномерных распределений. Именно по этой причине различные случайные процессы могут иметь одинаковые математические ожидания и корреляционные функции.

Замечание

Задачи 8.8 и 8.9 предлагается решить самостоятельно.

Задача 8.8. Найти математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию случайного процесса $X(t) = V \cdot t^2$, если случайная величина V — число бросаний игральной кости до первого появления шести очков.

Задача 8.9. Найти математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию случайного процесса $X(t) = V \cdot \sin t$, если случайная величина V равномерно распределена на отрезке $[2;\, 4]$.

Взаимная корреляционная функция двух случайных процессов

Рассматриваются два случайных процесса $X(t)$, $t \in T_X \subset R$, и $Y(t)$, $t \in T_Y \subset R$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Im, P \rangle$.

Определение 8.14. *Взаимной корреляционной функцией* случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция $K_{XY}(t_1, t_2)$ двух переменных $t_1 \in T_X$ и $t_2 \in T_Y$, равная корреляционному моменту сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$, т. е.

$$K_{XY}(t_1, t_2) = K_{X(t_1)Y(t_2)}\,. \tag{8.14}$$

Из определения и свойств корреляционного момента следует, что:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = M\left[X(t_1)Y(t_2)\right] - m_X(t_1)\,m_Y(t_2)\,. \tag{8.15}$$

Определение 8.15. Если $K_{XY}(t_1, t_2) = 0$, то случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными*.

Для некоррелированных случайных процессов справедливо:

$$M\left[X(t_1)Y(t_2)\right] = m_X(t_1)m_Y(t_2);$$

$$D\left[X(t_1) \pm Y(t_2)\right] = D_X(t_1) + D_Y(t_2).$$

Определение 8.16. *Нормированной корреляционной функцией* случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция двух переменных, которую обозначают $r_{XY}(t_1, t_2)$ и которая для любых фиксированных значений $t_1, t_2 \in T \in R$ равна коэффициенту корреляции сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$, т. е.

$$r_{XY}(t_1, t_2) = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)}. \tag{8.16}$$

Взаимная корреляционная функция и нормированная взаимная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ — неотрицательно определенные функции, для которых справедливы свойства, приведенные в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Взаимная корреляционная функция	**Нормированная взаимная корреляционная функция**
$K_{XY}(t_1, t_2) = K_{YX}(t_2, t_1)$	$r_{XY}(t_1, t_2) = r_{YX}(t_1, t_2)$
$K_{aX+b,\, cY+d}(t_1, t_2) = a(t_1)c(t_2)K_{XY}(t_1, t_2)$, если $a(t)$ и $c(t)$ — неслучайные функции	$r_{aX+b,\, cY+d}(t_1, t_2) = sign\big(a(t_1)c(t_2)\big)r_{XY}(t_1, t_2)$, если $a(t)$ и $c(t)$ — неслучайные функции
$\lvert K_{XY}(t_1, t_2)\rvert \le \sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)$	$\lvert r_{XY}(t_1, t_2)\rvert \le 1$
$K_{X+Y}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2) + K_{XY}(t_1, t_2) + K_{YX}(t_2, t_1)$	
$K_{X+Y}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2)$, если $X(t)$ и $Y(t)$ — некоррелированные случайные процессы	

Следствие. $D_{X \pm Y}(t) = D_X(t) + D_Y(t) \pm 2K_{XY}(t, t)$.

Замечание

Если $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ — векторный случайный процесс, то корреляционная (автокорреляционная) функция превращается в функциональную корреляционную матрицу, т. е.

$$\mathbf{K}_X(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} K_{X_1}(t_1, t_2) & K_{X_1X_2}(t_1, t_2) \\ K_{X_2X_1}(t_1, t_2) & K_{X_2}(t_1, t_2) \end{pmatrix}.$$

Если $X(t)=(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, то функциональная корреляционная матрица имеет вид

$$\mathbf{K}_X(t_1,t_2)=\begin{pmatrix} K_{X_1}(t_1,t_2) & K_{X_1X_2}(t_1,t_2) & K_{X_1X_3}(t_1,t_2) \\ K_{X_2X_1}(t_1,t_2) & K_{X_2}(t_1,t_2) & K_{X_2X_3}(t_1,t_2) \\ K_{X_3X_1}(t_1,t_2) & K_{X_3X_2}(t_1,t_2) & K_{X_3}(t_1,t_2) \end{pmatrix}.$$

Задача 8.10. Заданы два случайных процесса $X(t)=U\cos 2t+V\sin 2t$ и $Y(t)=U\cos 2t-V\sin 2t$, где U и V — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1;1]$. Найти взаимную корреляционную функцию и нормированную взаимную корреляционную функцию случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Решение. Из равномерного закона распределения случайных величин U и V следует, что $M[U]=M[V]=0$ и $D[U]=D[V]=\frac{1}{3}$. Взаимная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ определяется из соотношения (8.15) и имеет вид:

$$K_{XY}(t_1,t_2)=M[(U\cos 2t_1+V\sin 2t_1)(U\cos 2t_2-V\sin 2t_2)]=\cos 2t_1\cos 2t_2 M\left[U^2\right]+$$
$$+(\sin 2t_1\cos 2t_2+\cos 2t_1\sin 2t_2)M[UV]-\sin 2t_1\sin 2t_2 M\left[U^2\right].$$

Случайные величины U и V — независимые. Поэтому $M[UV]=M[U]M[V]=0$, а т. к. $M[U]=M[V]=0$, то $M\left[U^2\right]=D[U]=\frac{1}{3}$ и $M\left[V^2\right]=D[V]=\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$K_{XY}(t_1,t_2)=\frac{1}{3}\cos 2t_1\cos 2t_2-\frac{1}{3}\sin 2t_1\sin 2t_2=$$
$$=\frac{1}{3}(\cos 2t_1\cos 2t_2-\sin 2t_1\sin 2t_2)=\frac{1}{3}\cos 2(t_1+t_2).$$

Из соотношения (8.16) следует, что нормированная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ равна

$$r_{XY}(t_1,t_2)=\frac{K_{XY}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)}=\frac{\frac{1}{3}\cos 2(t_1+t_2)}{\frac{1}{3}}=\cos 2(t_1+t_2).$$

Замечание

Задачу 8.11 предлагается решить самостоятельно.

Задача 8.11. Заданы корреляционные функции двух некоррелированных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2$, $K_Y(t_1,t_2)=\sin t_1\sin t_2$. Найти $K_Z(t_1,t_2)$, если $Z(t)=\ln t\cdot X(t)+t^2Y(t)$.

8.3. Понятие комплексного случайного процесса

Определение 8.17. Пусть $X(t)$ и $Y(t)$, $t \in T \in R$, — два случайных процесса, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Im, P \rangle$. Случайный процесс $Z(t) = X(t) + i \cdot Y(t)$, где $i^2 = -1$, называется *комплéксным случайным процессом*.

Сечениями комплексного случайного процесса являются комплекснозначные случайные величины $X(\omega, t_0) + i \cdot Y(\omega, t_0)$, а его реализациями — комплекснозначные функции вещественной переменной $t \in T \subset R$: $X(\omega_0, t) + i \cdot Y(\omega_0, t)$.

Математическим ожиданием комплексного случайного процесса $Z(t) = X(t) + i \cdot Y(t)$ называется комплекснозначная неслучайная функция вещественной переменной $t \in T \subset R$:

$$m_Z(t) = M[Z(t)] = M[X(t)] + i \cdot M[Y(t)].$$

Корреляционной (автокорреляционной) функцией комплексного случайного процесса $Z(t) = X(t) + i \cdot Y(t)$ называется неслучайная функция двух переменных, которую обозначают $K_Z(t_1, t_2)$ и которая для любых фиксированных значений $t_1, t_2 \in T \in R$ равна корреляционному моменту сечений $Z(t_1)$ и $\bar{Z}(t_2)$, где $\bar{Z}(t_2) = X(t_2) - i \cdot Y(t_2)$, т. е.

$$K_Z(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{\bar{Z}}(t_2)\right] = M\left[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(\bar{Z}(t_2) - m_{\bar{Z}}(t_2))\right]$$

или

$$K_Z(t_1, t_2) = M\left[Z(t_1)\bar{Z}(t_2)\right] - m_Z(t_1)\bar{m}_Z(t_2).$$

Если случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы, то

$$K_Z(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2).$$

В общем случае $K_Z(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2) + i \cdot (K_{XY}(t_2, t_1) - K_{XY}(t_1, t_2))$.

Дисперсия $\sigma_Z^2(t)$ случайного процесса $Z(t) = X(t) + i \cdot Y(t)$ выражается через корреляционную функцию по формуле:

$$\sigma_Z^2(t) = D[Z(t)] = K_Z(t,t) = M\left[\left|\overset{\circ}{Z}(t)\right|^2\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)\right)^2\right] + M\left[\left(\overset{\circ}{Y}(t)\right)^2\right]$$

или

$$\sigma^2{}_Z(t) = D[Z(t)] = D[X(t)] + D[Y(t)] \geq 0.$$

8.4. Некоторые типы случайных процессов

Стационарные случайные процессы

Определение 8.18. Случайный процесс $X(t)$, $t \in T \subset R$, называется *стационарным в узком смысле*, если все его конечномерные распределения не зависят от сдвига, т. е. случайные векторы $\mathbf{X}(t) = (X(t_1),\ X(t_2),\ ...,\ X(t_n))$ и $\mathbf{X}(t+h) = (X(t_1+h),\ X(t_2+h),\ ...,\ X(t_n+h))$, зависят только от n и от $t_1, t_2, ..., t_n$ и являются одинаковыми при всех $h > 0$.

Определение 8.19. Случайный процесс $X(t)$, $t \in T \subset R$, называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянное, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов, т. е.

- $M[X(t)] = m_X(t) = \text{const}$;
- $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2 - t_1) = K_X(s)$, где $s = t_2 - t_1$.

Теорема 8.3. Если случайный процесс $X(t)$ — стационарный в узком смысле, то он стационарный и в широком смысле.

Замечание 1

Из стационарности в широком смысле стационарность в узком смысле не следует.

Замечание 2

Под стационарностью в дальнейшем мы будем понимать стационарность в широком смысле. Исследование стационарности в узком смысле выходит за пределы нашего курса.

Теорема 8.4. Если случайный процесс $X(t)$ — стационарный, $K_X(t_2 - t_1)$ — его корреляционная функция, то справедливы следующие соотношения:

1. $D_X(t) = \sigma_X^2(t) = K_X(0)$, поскольку $D_X(t) = K_X(t,t) = K_X(t-t) = K_X(0) = \text{const}$.
2. $K_X(t_2 - t_1) = K_X(t_1 - t_2)$, поскольку $K_X(t_2 - t_1) = K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1) K_X(t_1 - t_2)$.
3. $|K_X(t_2 - t_1)| \le K_X(0) = \sigma_X^2$, поскольку $|K_X(t_1, t_2)| \le \sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2) = K_X(0)$.

Замечание

Из второго соотношения следует, что корреляционная функция стационарного случайного процесса четная, поскольку

$$K_X(t_2 - t_1) = K_X(s) = K_X(t_1 - t_2) = K_X(-s).$$

Теорема 8.5. Если случайный процесс $X(t)$ — стационарный, $r_X(t_2 - t_1)$ — его нормированная корреляционная функция, то справедливы следующие соотношения:

1. $r_X(0) = 1$, т. к. $r_X(t_2 - t_1) = \dfrac{K_X(t_2 - t_1)}{K_X(0)}$.

2. $r_X(t_2-t_1)=r_X(t_1-t_2)$, т. к. $K_X(t_2-t_1)=K_X(t_1-t_2)$.

3. $\left|r_X(t_2-t_1)\right|\le 1$, т. к. $\left|r_X(t_2-t_1)\right|=\dfrac{\left|K_X(t_2-t_1)\right|}{K_X(0)}\le r_X(0)=1$.

Задача 8.12. Проверить, является ли элементарный случайный процесс $X(t)=a(t)\cdot V$, где V — случайная величина, а $a(t)\ne 0$ — неслучайная функция, стационарным.

Решение. Вычислим $M[X(t)]=a(t)\cdot M[V]\ne \text{const}$ при $a(t)\ne 0$. Следовательно, элементарный случайный процесс не является стационарным даже в широком смысле.

Задача 8.13. Выяснить, является ли случайный процесс $X(t)=2\sin(t+2\Phi)$, где Φ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;\pi]$, стационарным в широком смысле.

Решение. Вычислим математическое ожидание случайного процесса:

$$M\left[X(t)\right]=2M\left[\sin(t+2\Phi)\right]=2\sin t\cdot M[\cos 2\Phi]+2\cos t\cdot M[\sin 2\Phi].$$

Плотность равномерно распределенной на $[0;\pi]$ случайной величины Φ имеет вид:

$$f_\Phi(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & \varphi\in[0;\pi];\\ 0, & \varphi\notin[0;\pi].\end{cases}$$

Поэтому $M[\cos 2\Phi]=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos 2\varphi d\varphi=0$, $M[\sin 2\Phi]=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin 2\varphi d\varphi=0$, и, следовательно, $m_X(t)=M[X(t)]=0$.

Вычислим корреляционную функция случайного процесса:

$$\begin{aligned}K_X(t_1,t_2)&=M\left[X(t_1)X(t_2)\right]-m_X(t_1)m_X(t_2)=M\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\\&=4M\left[\sin(t_1+2\Phi)\sin(t_2+2\Phi)\right]=\\&=2M\left[\cos(t_1+2\Phi-t_2-2\Phi)-\cos(t_2+2\Phi+t_2+2\Phi)\right]=\\&=2M\left[\cos(t_1-t_2)\right]-2M\left[\cos(t_1+2\Phi+t_2+2\Phi)\right]=2\cos(t_1-t_2).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}M\left[\cos(t_1+t_2+4\Phi)\right]&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\Phi(\varphi)\cos(t_1+t_2+4\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(t_1+t_2+4\varphi)d\varphi=\\&=\frac{1}{4\pi}\sin(t_1+t_2+4\varphi)\Big|_0^\pi=\frac{1}{4\pi}\left(\sin(t_1+t_2+4\pi)-\sin(t_1+t_2)\right)=0,\end{aligned}$$

случайный процесс является стационарным в широком смысле.

Замечание

Задачи 8.14 и 8.15 предлагается решить самостоятельно.

Задача 8.14. Задан случайный процесс $X(t)=U+V\cdot t$, где U и V — случайные величины, распределенные по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2. Является ли случайный процесс стационарным в широком смысле?

Задача 8.15. Задан случайный процесс $X(t)=U\cos 2t+V\sin 2t$, где U и V — одинаково распределенные дискретные случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностями 0,5. Является ли случайный процесс стационарным?

Нормальные случайные процессы

Определение 8.20. Случайный процесс $X(t)$, $t\in T\subset R$, называется *нормальным* или *гауссовским*, если все его конечномерные законы распределения нормальные.

Иными словами, у гауссовского случайного процесса $X(t)$ случайный вектор $X(t)=\left(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\right)$ имеет нормальное распределение.

Нормальный случайный процесс обладает следующими свойствами.

1. Нормальный случайный процесс полностью определяется вектором математических ожиданий и корреляционной матрицей.
2. Для гауссовского случайного процесса понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают.
3. Одномерный закон распределения нормального случайного процесса может быть задан плотностью

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\exp\left\{-\frac{\left(x-a(t)\right)^2}{2\sigma^2(t)}\right\},$$

   где $a(t)$ и $\sigma^2(t)$ — математическое ожидание и дисперсия сечения при фиксированном t, соответственно.

Случайный процесс с независимыми приращениями

Определение 8.21. Случайный процесс $X(t)$, $t\in T\subset R$, называется случайным процессом *с независимыми приращениями*, если при $\forall\, t_0\le t_1\le ...\le t_n$, где $t_k\in T$ при $k=0,1,...,n$ случайные величины $X(t_1)-X(t_0)$, $X(t_2)-X(t_0)$, ..., $X(t_n)-X(t_{n-1})$ независимы.

Иными словами, для случайного процесса с независимыми приращениями $X(t)$ приращения на непересекающихся отрезках времени не зависят друг от друга.

Определение 8.22. Случайный процесс с независимыми приращениями $X(t)$, где $t>0$, называется *винеровским*, если:

1. $X(0)=0$;
2. для любых $0 \le t_{i-1} < t_i ... \le t_n$ случайная величина $X(t_i)-X(t_{i-1})$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и $s = t_i - t_{i-1}$;
3. реализации $X(t)$ — непрерывные функции переменной t.

Из определения следует, что одномерный закон распределения винеровского случайного процесса может быть задан плотностью

$$f_Y(x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}, \ x \in R, \text{ где } Y = X(t_i) - X(t_{i-1}).$$

Замечание 1

Учитывая условие 1 в определении 8.22, говорят, что винеровский случайный процесс выходит из точки $x = 0$. Если его заменить на $X(0) = x_0$, то винеровский случайный процесс называют выходящим из точки x_0.

Замечание 2

Винеровский случайный процесс является нормальным.

Определение 8.23. Случайный процесс с независимыми приращениями $X(t)$, где $t > 0$, называется *пуассоновским с параметром* λ, если:

1. $X(0)=0$;
2. для любых $0 \le t_{i-1} < t_i ... \le t_n$ случайная величина $X(t_i)-X(t_{i-1})$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda(t_i - t_{i-1})$;
3. реализации $X(t)$ — непрерывные слева функции t.

Из определения следует, что для пуассоновского случайного процесса справедливо:

$$P\left\{\left(X(t_i) - X(t_{i-1})\right) = k\right\} = \frac{\left(\lambda(t_i - t_{i-1})\right)^k}{k!} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}, \ k = 0, 1, ...$$

Марковский случайный процесс

Определение 8.24. Пусть для случайного процесса $X(t)$, $t \in T \subset R$, при любых $t_k \in T$, $k = 0, 1, ..., n$, заданы n-мерные плотности распределения $f_X(x_1, x_2, ..., x_n \mid t_1, t_2, ..., t_n)$ или, проще, $f_X(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если для условной плотности распределения $f_X(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1)$ справедливо

$$f_X(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1) \equiv f_X(x_n \mid x_{n-1}),$$

то случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, называется *марковским случайным процессом.*

Иными словами, "будущее" у марковского случайного процесса не зависит от "прошлого", а зависит только от "настоящего" (рис. 8.5).

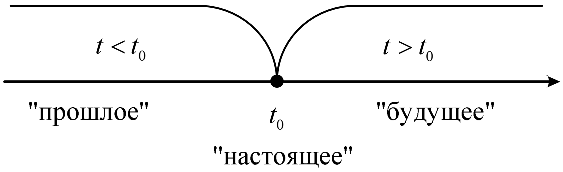

Рис. 8.5

Замечание 1

Для марковского случайного процесса $\forall t_k \in T : t_1 < ... < t_{n-1}, t_n$ справедливо

$$P\left(X\left(t_n\right) = x_n \mid X\left(t_{n-1}\right) = x_{n-1}, ..., X\left(t_1\right) = x_1\right) = P\left(X\left(t_n\right) = x_n \mid X\left(t_{n-1}\right) = x_{n-1}\right).$$

Замечание 2

Случайные процессы с независимыми приращениями, в частности винеровский и пуассоновский, являются марковскими.

8.5. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов

Определение 8.25. Пусть задан случайный процесс $X(t)$, $t \in T \subset R$. Говорят, что $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} X(t_0)$ *в среднеквадратическом*, если $M\left[\left|X(t) - X(t_0)\right|^2\right] \underset{t \to t_0}{\to} 0$.

Для сходимости $X(t)$ к $X(t_0)$ в среднеквадратическом используют обозначение $\lim\limits_{t \to t_0} X(t) = X(t_0)$.

Определение 8.26. Пусть случайный процесс $X(t) = X(\omega, t)$, $t \in T \in R$, задан на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Im, P \rangle$. Производной случайного процесса $X(t)$ называется случайный процесс, который обозначается $X'(t) = \dfrac{dX}{dt}$ и при каждом $t \in T$ определяется равенством

$$X'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}, \tag{8.17}$$

если предел в среднеквадратическом существует. При этом говорят, что случайный процесс $X(t)$ дифференцируем в среднеквадратическом при $t \in T$.

Определение 8.27. Пусть случайный процесс $X(t) = X(\omega, t)$, $t \in T \in R$, задан на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Im, P \rangle$. *Интегралом* случайного процесса $X(t)$ называется случайный процесс, который обозначается $\int\limits_0^t X(u)\,du$ и при каждом $t \in T$ определяется равенством

$$\int_0^t X(u)\,du = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\tilde{t}_i)\,\Delta t_i\,, \tag{8.18}$$

где $\lambda = \max\limits_i \Delta t_i$ — ранг дробления промежутка $[0;t]$ при $t \in T$, $t_i < \tilde{t}_i < t_{i+1}$, если предел в среднеквадратическом существует и не зависит от способа дробления промежутка $[0;t]$ и от выбора точек $\tilde{t}_i$. При этом говорят, что случайный процесс $X(t)$ интегрируем в среднеквадратическом при $t \in T$.

Замечание

Очевидно, что производная и интеграл случайного процесса определены на том же вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Im, P \rangle$.

Введенные операторы дифференцирования $\dfrac{dX}{dt}$ и интегрирования $\int\limits_0^t X(u)\,du$ являются примерами линейных однородных операторов.

Определение 8.28. Оператор $L(t)$, преобразующий случайный процесс $X(t)$ в случайный процесс $Y(t) = L(X(t))$, называется *линейным однородным*, если для любых случайных величин A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ и любых неслучайных функций $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ выполняется соотношение

$$L\left\{\sum_{i=1}^{n} A_i \varphi_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} A_i L\{\varphi_i(t)\}.$$

Оператор $L_{\text{н}}(t)$ называется *линейным неоднородным*, если

$$L_{\text{н}}\{X(t)\} = L\{X(t)\} + f(t),$$

где $f(t)$ — неслучайная функция.

Задача 8.16. Пусть случайный процесс $X(t)$ задан в виде

$$X(t) = \cos t + U \cdot t^2 + V \cdot t\,,$$

где U и V — некоррелированные случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1;1]$. Найти числовые характеристики случайных процессов $Y(t) = \dfrac{dX}{dt}$ и $Z(t) = \int\limits_0^t X(u)du$.

Решение. По свойствам линейности справедливо:

$$Y(t) = X'(t) = \frac{dX}{dt} = -\sin t + 2U \cdot t + V\,,$$

Поскольку $M[U] = M[V] = 0$, $D[U] = D[V] = \dfrac{1}{3}$, U и V — некоррелированные случайные величины, то

$$M\left[Y(t)\right] = -\sin t + 2t \cdot M\left[U\right] + M\left[V\right] = -\sin t\,;$$

$$M\left[Z(t)\right] = \sin t + \frac{t^3}{3} \cdot M\left[U\right] + \frac{t^2}{2} \cdot M\left[V\right] = \sin t\,;$$

$$K_Y\left(t_1, t_2\right) = 4t_1 \cdot t_2 \cdot D\left[U\right] + D\left[V\right] = \frac{4}{3} t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{3}\,;$$

$$K_Z\left(t_1, t_2\right) = \frac{t_1^3 \cdot t_2^3}{9} \cdot D\left[U\right] + \frac{t_1^2 \cdot t_2^2}{4} \cdot D\left[V\right] = \frac{t_1^3 \cdot t_2^3}{27} + \frac{t_1^2 \cdot t_2^2}{12}\,;$$

$$D_Y(t) = \frac{1}{3}\left(4t^2 + 1\right),\ D_Z(t) = \frac{t^6}{27} + \frac{t^4}{12}\,.$$

Замечание

Представление случайного процесса $X(t)$ в виде суммы

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi_i(t), \tag{8.19}$$

где $\varphi_i(t)$ — неслучайные функции $(i = 1, 2, ..., n)$; A_i — попарно некоррелированные с нулевыми математическими ожиданиями случайные величины $(i = 1, 2, ..., n)$; $M[A_i] = 0$, $D[A_i] = d_i$, $K_{A_i A_j} = 0$ при $i, j = 1, 2, ..., n$, называется *каноническим разложением случайного процесса.* Неслучайные функции $\varphi_i(t)$ называются *координатными* или *базисными* функциями, а случайные величины A_i — коэффициентами разложения. Из формулы (8.19) очевидно, что

$$M\left[X(t)\right] = m_X(t) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) M\left[A_i\right] = m_X(t)\,; \tag{8.20}$$

$$K_X\left(t_1, t_2\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left(t_1\right) \varphi_i\left(t_2\right) d_i\,,\ D_X(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t)\, d_i\,. \tag{8.21}$$

Теорема 8.6. Если случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X(t)$ и корреляционной функцией $K_X(t_1, t_2)$ преобразуется линейным однородным оператором L в случайный процесс $Y(t) = L(X(t))$, то математическое ожидание и корреляционная функция $Y(t)$ также определяются с помощью оператора L, т. е. из соотношений

$$m_Y(t) = L\left(m_X(t)\right),\ K_Y\left(t_1, t_2\right) = L_{t_1}\left(L_{t_2}\left(K_X\left(t_1, t_2\right)\right)\right),$$

в которых через L_{t_1} и L_{t_2} обозначено преобразование по переменным t_1 и t_2.

Следствие 1. Знаки математического ожидания и производной или интеграла можно менять местами, т. е.

$$M\left[X'(t)\right] = m'_X(t)\,; \tag{8.22}$$

$$M\left[\int_0^t X(u)\,du\right]=\int_0^t m_X(u)\,du, \tag{8.23}$$

где $m_X(t)=M[X(t)]$.

Следствие 2. Если $K_X(t_1,t_2)$ — корреляционная функция случайного процесса $X(t)$, а $Y(t)=\dfrac{dX}{dt}$ и $Z(t)=\int_0^t X(u)\,du$, то

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}; \tag{8.24}$$

$$K_Z(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}du\int_0^{t_2}K_X(u,v)\,dv. \tag{8.25}$$

Задача 8.17. Найти числовые характеристики случайных процессов $Y(t)=\dfrac{dX}{dt}$ и $Z(t)=\int_0^t X(u)\,du$, если $X(t)$ — случайный процесс в задаче 8.16, найдя предварительно числовые характеристики $X(t)$ и используя формулы (8.22)–(8.25).

Решение. Случайный процесс $X(t)$ задан каноническим разложением. Учитывая, что для случайного процесса $X(t)$, заданного формулой (8.19), $m_X(t)=\cos t$, $\varphi_1(t)=t^2$, $\varphi_2(t)=t$, а также $M[A_1]=M[A_2]=0$, $D[A_1]=D[A_2]=\dfrac{1}{3}$, по формулам (8.20) и (8.21) можно получить:

$$M[X(t)]=\cos t,\ K_X(t_1,t_2)=\frac{1}{3}t_1^2\cdot t_2^2+\frac{1}{3}t_1\cdot t_2,\ D_X(t)=\frac{1}{3}t^4+\frac{1}{3}t^2.$$

Тогда числовые характеристики случайного процесса $Y(t)$ определяются по формулам (8.22) и (8.24) в виде

$$M[Y(t)]=(\cos t)'=-\sin t;$$

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(\frac{1}{3}t_1^2\cdot t_2^2+\frac{1}{3}t_1\cdot t_2\right)=\frac{4}{3}t_1\cdot t_2+\frac{1}{3},\ D_Y(t)=\frac{4}{3}t^2+\frac{1}{3}.$$

Для случайного процесса $Z(t)$ числовые характеристики можно определить по формулам (8.23) и (8.25):

$$M[Z(t)]=\int_0^t \cos u\,du=\sin t;$$

$$K_Z(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}du\int_0^{t_2}\left(\frac{1}{3}u^2\cdot v^2+\frac{1}{3}u\cdot v\right)dv=\int_0^{t_1}\left(\frac{1}{3}u^2\cdot\frac{t_2^3}{3}+\frac{1}{3}u\cdot\frac{t_2^2}{2}\right)=\frac{t_1^3\cdot t_2^3}{27}+\frac{t_1^2\cdot t_2^2}{12};$$

$$D_Z(t) = \frac{t^6}{27} + \frac{t^4}{12}.$$

Полученные результаты можно сравнить с результатами задачи 8.16.

Теорема 8.7. Если задан случайный процесс $X(t)$ и построены случайные процессы $Y(t) = X'(t)$ и $Z(t) = \int\limits_0^t X(u)\,du$, то можно говорить об их взаимной корреляционной функции. Можно доказать, что

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2},\ K_{YX}(t_2, t_1) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1}; \tag{8.26}$$

$$K_{XZ}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} K_X(t_1, v)\,dv,\ K_{ZX}(t_2, t_1) = \int\limits_0^{t_1} K_X(u, t_2)\,du. \tag{8.27}$$

Задача 8.18. Заданы числовые характеристики случайного процесса $X(t)$: $m_X(t) = 2t^2$, $K_X(t_1, t_2) = \cos(t_2 - t_1)$. Найти числовые характеристики случайных процессов $Y(t) = X'(t)$ и $Z(t) = \int\limits_0^t X(u)\,du$.

Решение. Учитывая формулы (8.22) и (8.23), вычислим математические ожидания случайных величин Y и Z:

$$m_Y(t) = M\left[X'(t)\right] = m_X'(t) = 4t;$$

$$m_Z(t) = M\left[\int\limits_0^t X(u)\,du\right] = \int\limits_0^t m_X(u)\,du = 2\int\limits_0^t u^2\,du = \frac{2}{3}t^3.$$

Из формул (8.24) и (8.25) следует, что:

$$K_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(\cos(t_2 - t_1)\right) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sin(t_2 - t_1)\right) = -\cos(t_2 - t_1)\cdot(-1) = \cos(t_2 - t_1);$$

$$K_Z(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} du \int\limits_0^{t_2} \cos(v - u)\,dv = \int\limits_0^{t_1}\left(\sin(t_2 - u) - \sin(-u)\right)du = \int\limits_0^{t_1}\left(\sin(t_2 - u) + \sin u\right)du =$$

$$= \cos(t_2 - t_1) - \cos t_2 - \cos t_1 + 1;$$

$$\sigma_Y^2(t) = K_Y(t, t) = \cos(t - t) = 1;$$

$$\sigma_Z^2(t) = K_Z(t, t) = \cos(t - t) - \cos t - \cos t + 1 = 2 - 2\cos t.$$

По формулам (8.26)

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\cos(t_2 - t_1)\right) = -\sin(t_2 - t_1);$$

$$K_{YX}(t_2, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\cos(t_2 - t_1)\right) = \sin(t_2 - t_1).$$

По формулам (8.27)

$$K_{XZ}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \cos(u - t_1) du = \sin(t_2 - t_1) + \sin t_1;$$

$$K_{ZX}(t_2, t_1) = \int_0^{t_1} \cos(t_2 - v) dv = -\sin(t_2 - t_1) + \sin t_2.$$

Теорема 8.8. Если $X(t)$ — стационарный случайный процесс, то его производная $Y(t) = X'(t)$ — тоже стационарный случайный процесс с числовыми характеристиками

$$m_Y(t) = 0, \; K_Y(t_2 - t_1) = K_Y(s) = -\frac{d^2 K_X(s)}{ds^2}, \text{ где } s = t_2 - t_1. \qquad (8.28)$$

Если $m_X(t) \neq 0$, то $Z(t) = \int_0^t X(u) du$ не является стационарным случайным процессом. Если же $m_X(t) = 0$, то $Z(t)$ может быть стационарным, а может и не быть. В любом случае для его корреляционной функции справедливо соотношение

$$K_Z(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_2 - s) K_X(s) ds - \int_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - s) K_X(s) ds + \int_0^{t_1} (t_1 - s) K_X(s) ds. \qquad (8.29)$$

Задача 8.19. Случайный процесс $X(t)$ задан в виде

$$X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t, \qquad (8.30)$$

где U и V — некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Выяснить, является ли стационарным этот случайный процесс.

Решение. Вычислим математическое ожидание и корреляционную функцию этого процесса:

$$M\left[X(t)\right] = \cos \omega t M[U] + \sin \omega t M[V] = 0.$$

Поскольку случайные величины U и V не зависят от t, то $K_U(t_1, t_2) = D[U] = \sigma^2$ и $K_V(t_1, t_2) = D[V] = \sigma^2$, то

$$K_X(t_1, t_2) = \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 K_U(t_1, t_2) + \sin \omega t_1 \cdot \sin \omega t_2 K_V(t_1, t_2) =$$
$$= \sigma^2 (\cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 + \sin \omega t_1 \cdot \sin \omega t_2) = \sigma^2 \cos \omega (t_2 - t_1),$$

из чего следует, что $D\left[X(t)\right] = \sigma^2$, а случайный процесс является стационарным. Случайный процесс вида (8.30) называют *элементарным стационарным случайным процессом*.

Задача 8.20. Найти числовые характеристики случайных процессов $Y(t)=\dfrac{dX}{dt}$ и $Z(t)=\int_0^t X(u)du$, если $X(t)$ — элементарный стационарный случайный процесс (8.30).

Решение. По теореме 8.8 случайный процесс $Y(t)$ является стационарным. Поэтому найдем его числовые характеристики по формулам (8.28):

$$m_Y(t)=0;$$

$$K_Y(t_2-t_1)=K_Y(s)=-\frac{d^2}{ds^2}\left(\sigma^2\cos\omega s\right)=-\sigma^2\frac{d}{ds}\left(-\omega\sin\omega s\right)=\sigma^2\omega^2\cos\omega s,$$

где $s=t_2-t_1$.

Проверим, будет ли стационарным случайный процесс $Z(t)$. Вычислим его математическое ожидание и корреляционную функцию:

$$M\left[Y(t)\right]=M\left[\int_0^t X(u)du\right]=\int_0^t M\left[X(u)\right]du=0;$$

$$K_Z(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}du\int_0^{t_2}K_X(u.v)dv=\int_0^{t_1}du\int_0^{t_2}\sigma^2\cos\omega(v-u)dv=\sigma^2\int_0^{t_1}\left.\frac{\sin\omega(v-u)}{\omega}\right|_0^{t_2}du=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\omega}\int_0^{t_1}\left(\sin\omega(t_2-u)+\sin\omega u\right)du=\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left.\left(\cos\omega(t_2-u)-\cos\omega u\right)\right|_0^{t_1}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left(\cos\omega(t_2-t_1)-\cos\omega t_2-\cos\omega t_1+1\right).$$

Корреляционная функция не является функцией только разности t_2-t_1, поэтому случайный процесс не является стационарным. Дисперсия случайного процесса $Z(t)$ равна:

$$D_Z(t)=\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left(1-2\cos\omega t\right).$$

Задача 8.21. Найти дисперсию случайного процесса $Z(t)=\int_0^t X(u)du$, зная корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$: $K_X(s)=2e^{-2|s|}$.

Решение. По формуле (8.29) для стационарного случайного процесса $X(t)$ справедливо

$$K_Z(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}(t_2-s)K_X(s)ds-\int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-s)K_X(s)ds+\int_0^{t_1}(t_1-s)K_X(s)ds. \quad (8.31)$$

При

$$t_1 = t_2 = t:\ D_Z(t) = \int_0^t (t-s) K_X(s)\,ds + \int_0^t (t-s) K_X(s)\,ds = 2\int_0^t (t-s) K_X(s)\,ds =$$

$$= 2\int_0^t (t-s)\cdot 2e^{-2s}\,ds = 4\int_0^t (t-s)\,d\frac{e^{-2s}}{-2} = 4\left((t-s)\cdot\frac{e^{-2s}}{-2} - (-1)\cdot\frac{e^{-2s}}{4}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= 4\left(\frac{e^{-2t}}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) = e^{-2t} + 2t - 1.$$

Задача 8.22. Найти корреляционную функцию случайного процесса $Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}$, зная корреляционную функцию $K_X(s) = \cos 2s$ стационарного случайного процесса $X(t)$.

Решение. По свойствам взаимной корреляционной функции

$$K_Y(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_{X'}(t_1, t_2) + K_{XX'}(t_1, t_2) + K_{X'X}(t_2, t_1).$$

Случайные процессы $X(t)$ и $X'(t)$ стационарные. Поэтому

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(s),\ s = t_2 - t_1,\ K_{X'}(t_1, t_2) = K_{X'}(s) = -\frac{\partial^2 K_X(s)}{\partial s^2}.$$

Для взаимных корреляционных функций $K_{XX'}(t_1, t_2)$ и $K_{X'X}(t_2, t_1)$, используя формулы (8.26), можно доказать, что

$$K_{XX'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \frac{\partial K_X(s)}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t_2} = \frac{\partial K_X(s)}{\partial s};$$

$$K_{X'X}(t_2, t_1) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial K_X(s)}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t_1} = -\frac{\partial K_X(s)}{\partial s}.$$

Следовательно, $K_{XX'}(t_1, t_2) + K_{X'X}(t_2, t_1) = 0$, и поэтому

$$K_Y(t_1, t_2) = K_Y(s) = K_X(s) - \frac{\partial^2 K_X(s)}{\partial s^2};$$

$$K_Y(s) = \cos 2s - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\cos 2s) = \cos 2s + 2\frac{\partial}{\partial s}(\sin 2s) = \cos 2s + 4\cos 2s = 5\cos 2s.$$

Замечание

Если стационарный случайный процесс $X(t)$ является гауссовским, то его n-я производная $Y(t) = X^{(n)}(t)$ — тоже гауссовский случайный процесс с числовыми характеристиками $m_Y(t) = 0$ и $K_Y(s) = (-1)^n \frac{d^{2n} K_X(s)}{ds^{2n}}$, где $s = t_2 - t_1$.

Задача 8.23. Заданы математическое ожидание $m_X(t) = 8$ и корреляционная функция $K_X(s) = 5e^{-|s|}(\cos 2s + 0,5\sin 2|s|)$ нормального стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти вероятность того, что производная $Y(t) = \frac{dX}{dt}$ заключена в интервале $(0;10)$.

Решение. $Y(t)$ — стационарный нормальный случайный процесс. По формуле (3.31) вероятность того, что производная $Y(t)$ заключена в интервале $(0;10)$, равна

$$P\{0 < Y(t) < 10\} = \Phi\left(\frac{10-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0-a}{\sigma}\right),$$

где $a = m_Y$, $\sigma^2 = D_Y$, $\Phi(t)$ — функция Лапласа.

Найдем числовые характеристики случайного процесса $Y(t)$.

$$a = m_Y(t) = m'_X(t) = 0;$$

$$K_Y(s) = -\frac{d^2 K_X(s)}{ds^2} = -\frac{d^2}{ds^2}\left(5e^{-|s|}\left(\cos 2s + 0,5\sin 2|s|\right)\right).$$

При $s > 0$

$$K_Y(s) = -\frac{d^2}{ds^2}\left(5e^{-s}\left(\cos 2s + 0,5\sin 2s\right)\right) =$$

$$= -5\frac{d}{ds}\left(-e^{-s}\left(\cos 2s + 0,5\sin 2s\right) + e^{-s}\left(-2\sin 2s + \cos 2s\right)\right) = 5\frac{d}{ds}\left(e^{-s}\cdot\frac{5}{2}\sin 2s\right) =$$

$$= \frac{25}{2}\left(-e^{-x}\sin 2x + e^{-s}2\cos 2s\right) = \frac{25}{2}e^{-s}\left(2\cos 2s - \sin 2s\right).$$

При $s < 0$

$$K_Y(s) = -\frac{d^2}{ds^2}\left(5e^{s}\left(\cos 2s - 0,5\sin 2s\right)\right) =$$

$$= -5\frac{d}{ds}\left(e^{s}\left(\cos 2s - 0,5\sin 2s\right) + e^{s}\left(-2\sin 2s - \cos 2s\right)\right) = 5\frac{d}{ds}\left(e^{s}\cdot\frac{5}{2}\sin 2s\right) =$$

$$= \frac{25}{2}\left(e^{s}\sin 2s + e^{s}2\cos 2s\right) = \frac{25}{2}e^{s}\left(2\cos 2s + \sin 2s\right).$$

При любых s: $K_Y(s) = \frac{25}{2}e^{-|s|}\left(2\cos 2s - \sin 2|s|\right)$. Тогда

$$D_Y = \sigma^2 = K_Y(0) = \frac{25}{2}\cdot 2 = 25,\ \sigma = 5;$$

$$P\{0 < Y(t) < 10\} = \Phi\left(\frac{10-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{0}{5}\right) = \Phi(2) = 0,4772,$$

где значение функции Лапласа определено из табл. П.2.

Замечание

Задачи 8.24 и 8.25 предлагается решить самостоятельно.

Задача 8.24. Заданы числовые характеристики случайного процесса $X(t)$: $m_X(t)=t^2e^{-t}$, $K_X(t_1,t_2)=e^{t_2+t_1}$. Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t_1,t_2)$ и $D_Y(t)$, если $Y(t)=2t^2X''(t)+4\sin t$.

Задача 8.25. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайных процессов $Y(t)=\dfrac{dX}{dt}$ и $Z(t)=\int\limits_0^t X(u)du$, если $X(t)=$ $=U\cos 2t+V\sin 2t$, а некоррелированные случайные величины U и V равномерно распределены на отрезке $[-1;1]$.

8.6. Эргодический случайный процесс

Определение 8.29. Пусть $X(t)$ — случайный процесс с постоянным математическим ожиданием $M[X(t)]=m_X=\text{const}$, интегрируемый на любом отрезке $[0;T]$ при $T>0$. Случайный процесс $X(t)$ называется *эргодическим по отношению к математическому ожиданию* m_X, если существует предел

$$\lim_{T\to\infty} M\left[\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt-m_X\right|^2\right]=0 \text{ или } \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt=m_X .$$

Величина $\tilde{m}=\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt$ называется *средним значением*. Среднее значение $\tilde{m}$ может служить оценкой математического ожидания m_X случайного процесса $X(t)$. Эта оценка является несмещенной, т. к.

$$M[\tilde{m}]=M\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt\right]=\frac{1}{T}\int\limits_0^T M\left[x(t)\right]dt=\frac{1}{T}\int\limits_0^T m_X dt=m_X .$$

Из определения следует, что для эргодического по отношению к математическому ожиданию случайного процесса $\tilde{m}$ является и состоятельной оценкой.

На рис. 8.6 показаны реализации $x(t)$ эргодического случайного процесса, которые колеблются относительно одного среднего значения $\tilde{x}(t)$.

Теорема 8.9. Пусть $X(t)$ — стационарный случайный процесс, интегрируемый на любом отрезке $[0;T]$ при $T>0$. Для эргодичности случайного процесса $X(t)$ по отношению к математическому ожиданию достаточно существования предела

$$\lim_{|t_2-t_1|\to\infty} K_X(t_1,t_2)=0 . \qquad (8.32)$$

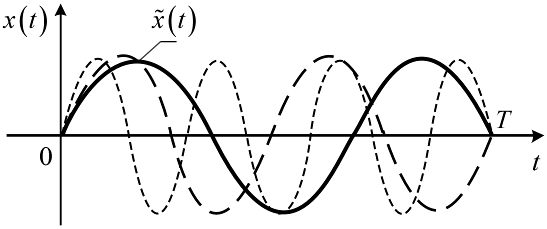

Рис. 8.6

Задача 8.26. Заданы числовые характеристики случайного процесса $X(t)$: $m_X(t)=0$, $K_X(t_1,t_2)=e^{-(t_2-t_1)}$. Является ли эргодическим по отношению к математическому ожиданию случайный процесс $Y(t)=\dfrac{dX}{dt}$?

Решение. Случайный процесс $Y(t)$ является стационарным и эргодическим, поскольку $\lim\limits_{|t_2-t_1|\to\infty} K_X(t_1,t_2)=\lim\limits_{|t_2-t_1|\to\infty} e^{-(t_2-t_1)}=0$. Следовательно, случайный процесс $Y(t)=\dfrac{dX}{dt}$ также стационарный. Найдем корреляционную функцию этого случайного процесса по формуле (8.28)

$$K_Y(t_2-t_1)=K_Y(s)=-\frac{d^2}{ds^2}\left(e^{-s^2}\right)=-\frac{d}{ds}\left(e^{-s^2}\cdot(-2s)\right)=2\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-s^2}\cdot s\right)=$$
$$=2\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-s^2}\cdot\left(-2s^2\right)+e^{-s^2}\right)=2e^{-s^2}\left(1-2s^2\right).$$

Выясним, выполняется ли достаточное условие эргодичности (8.32):

$$\lim_{s\to\infty}K_Y(s)=\lim_{s\to\infty}\left(2e^{-s^2}\cdot\left(1-2s^2\right)\right)=2\lim_{s\to\infty}\frac{1-2s^2}{e^{s^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2\lim_{s\to\infty}\frac{-4s}{e^{s^2}\cdot 2s}=2\lim_{s\to\infty}\frac{-2}{e^{s^2}}=0.$$

Следовательно, случайный процесс $Y(t)$ эргодический по отношению к математическому ожиданию.

Определение 8.30. Пусть $X(t)$ — стационарный случайный процесс, интегрируемый на любом отрезке $[0;T]$ при $T>0$. Случайный процесс $X(t)$ называется *эргодическим по отношению к дисперсии* $D_X=\mathrm{const}$, если существует предел

$$\lim_{T\to\infty}M\left[\left|\frac{1}{T}\int_0^T\left(x(t)-m_X\right)^2dt-D_X\right|^2\right]=0 \text{ или } \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(x(t)-m_X\right)^2dt=D_X.$$

Из определения ясно, что если случайный процесс $X(t)$ эргодический по отношению к дисперсии D_X, то случайный процесс $Y(t)=(X(t)-m_X)^2$ является эргодическим по отношению к математическому ожиданию $M[Y(t)]=D_X=\mathrm{const}$. Поэтому условие (8.31) является достаточным условием эргодичности случайного процесса $X(t)$ и по отношению к дисперсии. Следовательно, случайный процесс $Y(t)$, исследованный в задаче 8.23, эргодический и по отношению к дисперсии.

8.7. Спектральное разложение стационарного случайного процесса

Элементарный стационарный случайный процесс

Определение 8.31. *Элементарным стационарным случайным процессом* называется случайный процесс вида

$$X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t\,, \tag{8.33}$$

где U, V — случайные величины, $M[U] = M[V] = 0$, $D[U] = D[V] = d$, $K_{UV} = 0$, $\omega \in R$ — неслучайное число, называемое *частотой*.

Стационарный элементарный случайный процесс рассматривался в задаче 8.19, в которой были вычислены его характеристики и доказана стационарность:

$$M\left[X(t)\right] = 0\,,\ K_X(t_1, t_2) = d\cos\omega(t_2 - t_1)\,. \tag{8.34}$$

Производная элементарного стационарного случайного процесса

$$X'(t) = -U\omega\sin\omega t + V\omega\cos\omega t \tag{8.35}$$

является тоже стационарным процессом (см. задачу 8.20) с числовыми характеристиками

$$M\left[X'(t)\right] = 0\,,\ K_{X'}(t_1, t_2) = d\omega^2\cos\omega s\,,\ s = t_2 - t_1\,.$$

Сравнивая формулы (8.33) и (8.35), выясняем, что производная — это стационарный элементарный случайный процесс с частотой ω и со случайными коэффициентами $-U\omega$ и $V\omega$.

Интеграл от элементарного стационарного случайного процесса $Y(t) = \int\limits_0^t X(u)\,du$ не является стационарным случайным процессом, поскольку в задаче 8.20 было вычислено:

$$M\left[Y(t)\right] = 0\,,\ K_Y(t_1, t_2) = \frac{d}{\omega^2}\left(\cos\omega(t_2 - t_1) - \cos\omega t_2 - \cos\omega t_1 + 1\right).$$

Корреляционная функция не является функцией только разности $t_2 - t_1$, поэтому случайный процесс не является стационарным.

Спектральное разложение стационарного случайного процесса с дискретным спектром на конечном промежутке времени

Определение 8.32. Пусть $X(t)$ — стационарный случайный процесс, $t \in T$, $n \in N$ или $n = +\infty$. Представление случайного процесса в виде

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{n} U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t, \tag{8.36}$$

где $\omega_k \in R$ — неслучайные числа, называемые *частотами*; U_k, V_k — попарно некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, называется *спектральным разложением* стационарного случайного процесса.

В представлении случайного процесса в виде разложения (8.36) каждая гармоника $X_k(t) = U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t$ представляет собой элементарный стационарный случайный процесс со случайными коэффициентами U_k, V_k, для которых $M[U_k] = M[V_k] = 0$, $D[U_k] = D[V_k] = d_k$, при всех $k = 0, 1, ..., n$ и $K_{U_i V_k} = 0$, $K_{U_i U_j} = 0$, $K_{V_i V_j} = 0$, при всех $i, j, k = 0, 1, ..., n$.

Можно показать, что отдельные гармоники в формуле (8.36) не коррелированы между собой, поскольку

$$\begin{aligned} K_{X_k X_m}(t_1, t_2) &= M\left[X_k(t_1) \cdot X_m(t_2)\right] = \\ &= M\left[(U_k \cos\omega_k t_1 + V_k \sin\omega_k t_1)(U_m \cos\omega_m t_2 + V_m \sin\omega_m t_2)\right] = \\ &= \cos\omega_k t_1 \cos\omega_m t_2 M\left[U_k U_m\right] + \sin\omega_k t_1 \sin\omega_m t_2 M\left[V_k V_m\right] + \\ &+ \cos\omega_k t_1 \sin\omega_m t_2 M\left[U_k V_m\right] + \sin\omega_k t_1 \cos\omega_m t_2 M\left[V_k U_m\right] = 0, \end{aligned}$$

что следует из попарной некоррелированности коэффициентов U_k, V_k:

$$M\left[U_k U_m\right] = M\left[U_k\right] \cdot M\left[U_m\right] = 0, \quad M\left[V_k V_m\right] = M\left[V_k\right] \cdot M\left[V_m\right] = 0;$$
$$M\left[U_k V_m\right] = M\left[U_k\right] \cdot M\left[V_m\right] = 0, \quad M\left[V_k U_m\right] = M\left[V_k\right] \cdot M\left[U_m\right] = 0.$$

Замечание

Формула (8.36) — это, по сути, каноническое разложение случайного процесса (8.19) с коэффициентами U_k, V_k и с координатными функциями $\cos\omega_k t$ и $\sin\omega_k t$.

Формула (8.36) при $n = +\infty$ и с равноотстоящими частотами $\omega_k = \dfrac{\pi}{l} k$, $k = 0, 1, ..., n, ...$, $l > 0$ — это разложение случайного процесса $X(t)$ в ряд Фурье по обобщенной системе тригонометрических функций со случайными коэффициентами.

Каждую гармонику в разложении (8.36) можно представить в виде:

$$X_k(t) = U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t = \sqrt{U_k^2 + V_k^2} \sin(\omega_k t + \varphi_k) = \gamma_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \tag{8.37}$$

где $\gamma_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$ — *случайная амплитуда*; $\varphi_k = \operatorname{arctg}\dfrac{U_k}{V_k}$ — *случайная начальная фаза*; ω_k — неслучайная частота гармонического колебания. При этом $U_k = \gamma_k \cos\varphi_k$, $V_k = \gamma_k \sin\varphi_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ

В формуле (8.37) случайные величины γ_k и φ_k уже зависимы.

Числовые характеристики случайного процесса, заданного спектральным разложением

Пусть случайный процесс $X(t)$ задан спектральным разложением (8.36).

1. Очевидно, что $M[X(t)] = m_X$.
2. Поскольку отдельные гармоники не коррелированы между собой, то корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ равна сумме корреляционных функций слагаемых. Из формулы (8.34) следует, что

$$K_X(t_2 - t_1) = K_X(s) = \sum_{k=1}^{n} d_k \cos\omega_k (t_2 - t_1) = \sum_{k=1}^{n} d_k \cos\omega_k s, \tag{8.38}$$

   где $s = t_2 - t_1$.

   Представление корреляционной функции в виде соотношения (8.38) называется *спектральным разложением корреляционной функции* стационарного случайного процесса.
3. Учитывая, что $X(t)$ — стационарный случайный процесс и $D[X(t)] = K_X(0)$ по свойству дисперсии суммы некоррелированных слагаемых, можно получить *спектральное разложение дисперсии* стационарного случайного процесса:

$$D[X(t)] = \sum_{k=0}^{n} d_k, \tag{8.39}$$

   где $d_k = K_{X_k}(0)$ — дисперсия гармоники $X_k(t)$.

Определение 8.33. Пусть стационарный случайный процесс $X(t)$ задан спектральным разложением (8.36) при $n = +\infty$. Совокупность всех дисперсий $\{d_k\}_{k=0}^{+\infty}$ называется *спектром дисперсий*, а совокупность всех частот $\{\omega_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — *спектром частот* стационарного случайного процесса.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если говорят "спектр случайного процесса", то имеют в виду совокупность обоих спектров — дисперсий и частот.

Если рассмотреть спектральное разложение корреляционной функции (8.38) при $n = +\infty$ на промежутке $[-T; T]$, положив $t_2 - t_1 = s \in [-T; T]$ и задавая частоты в виде

$$\omega_0 = 0,\ \omega_1 = \frac{\pi}{T},\ \omega_2 = \frac{2\pi}{T},\ \ldots,\ \omega_k = \frac{k\pi}{T},\ \ldots,\ \Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{T},$$

то можно получить соотношение

$$K_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k \cos\omega_k s = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k \cos\frac{\pi k s}{T}. \tag{8.40}$$

Соотношение (8.40) представляет собой разложение корреляционной функции $K_{X(s)}$ в ряд Фурье по косинусам с коэффициентами d_k, которые, в силу единственности разложения Фурье, вычисляются по соответствующим формулам Эйлера — Фурье в виде:

$$d_0 = \frac{1}{T}\int_0^T K_X(s)\,ds;$$

$$d_k = \frac{2}{T}\int_0^T K_X(s)\cos\omega_k s\,ds = \frac{2}{T}\int_0^T K_X(s)\cos\frac{\pi k s}{T}\,ds, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{8.41}$$

Изобразив дисперсии гармоник d_k, соответствующие частотам ω_k, вертикальными отрезками прямой (*спектральными линиями*) в осях (s, d), получим так называемый *линейчатый спектр* (рис. 8.7).

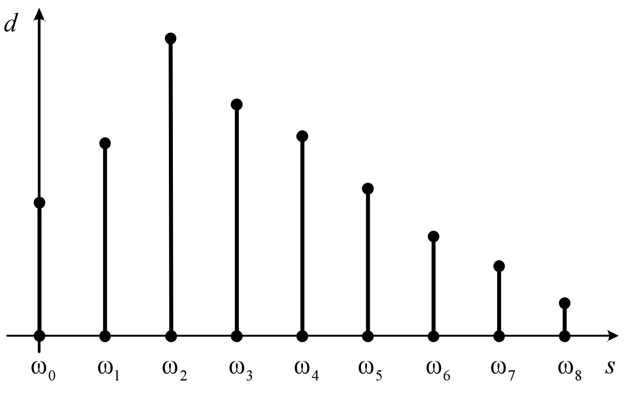

Рис. 8.7

Задача 8.27. Заданы математическое ожидание $m_X = 0$ и корреляционная функция $K_X(t_2 - t_1) = K_X(s) = e^{-|s|}$ стационарного случайного процесса. Найти спектральное разложение корреляционной функции этого случайного процесса.

Решение. Найдем дисперсии гармоник по формулам (8.41), используя интегрирование по частям.

$$d_0 = \frac{1}{T}\int_0^T K_X(s)\,ds = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-s}ds = \frac{1}{T}\left(-e^{-s}\right)\Big|_0^T = \frac{1-e^{-T}}{T}; \tag{8.42}$$

$$d_k = \frac{2}{T}\int_0^T K_X(s)\cos\omega_k s\,ds = \frac{2}{T}\int_0^T e^{-s}\cos\omega_k s\,ds = -\frac{2}{T}\int_0^T \cos\omega_k s\,d\left(e^{-s}\right) =$$

$$= -\frac{2}{T}\left(\cos\omega_k s\,e^{-s}\right)\Big|_0^T - \frac{2}{T}\int_0^T e^{-s}\sin\omega_k s\cdot\omega_k ds = \frac{2}{T} - \frac{2}{T}\cos\omega_k T\cdot e^{-T} + \frac{2}{T}\omega_k\int_0^T \sin\omega_k s\cdot d\left(e^{-s}\right) =$$

$$= \frac{2}{T} - \frac{2}{T}\cos\omega_k T\cdot e^{-T} + \frac{2}{T}\omega_k\sin\omega_k s\cdot e^{-s}\Big|_0^T - \frac{2}{T}\omega_k^2\int_0^T e^{-s}\cos\omega_k s\,ds =$$

$$= \frac{2}{T} - \frac{2}{T}\cos\omega_k T\cdot e^{-T} + \frac{2}{T}\sin\omega_k T\cdot e^{-T} - \omega_k^2 d_k .$$

Разрешая полученное равенство относительно d_k, получим:

$$\left(1+\omega_k^2\right)d_k = \frac{2}{T}\left(1 - \frac{2}{T}\cos\omega_k T\cdot e^{-T} + \frac{2}{T}\omega_k\sin\omega_k T\cdot e^{-T}\right)$$

или

$$d_k = \frac{1}{1+\omega_k^2}\frac{2}{T}\left(1 - \frac{2}{T}\cos\omega_k T\cdot e^{-T} - \frac{2}{T}\omega_k\sin\omega_k T\cdot e^{-T}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n, \ldots \tag{8.43}$$

По формуле (8.40) спектральное разложение корреляционной функции будет иметь вид:

$$K_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\cos\omega_k s = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\cos\frac{\pi k s}{T},\ s\in[-T;T],$$

где коэффициенты d_k вычисляются по формулам (8.42) и (8.43).

Спектральное разложение стационарного случайного процесса с непрерывным спектром на бесконечном промежутке времени

Пусть $X(t)$ — стационарный случайный процесс, заданный спектральным разложением с дискретным спектром дисперсий и частот при $n = +\infty$:

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{n} U_k\cos\omega_k t + V_k\sin\omega_k t, \tag{8.44}$$

где U_k, V_k — случайные некоррелированные коэффициенты с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $D[U_k] = D[V_k] = d_k$, при всех $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$

Выпишем спектральное разложение корреляционной функции процесса

$$K_X(s) = \sum_{k=1}^{n} d_k\cos\omega_k s \tag{8.45}$$

и рассмотрим $s\in[-T;T]$, $\omega_k = \dfrac{k\pi}{T}$, при всех $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$

Обозначим $\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \dfrac{\pi}{T} = \Delta\omega \to 0$ при $T \to +\infty$ и перепишем формулу (8.45) в виде

$$K_X(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{\Delta\omega_k} \cos\omega_k s \cdot \Delta\omega_k . \tag{8.46}$$

Обозначим

$$S_X(\omega_k) = \frac{d_k}{\Delta\omega_k}, \ k = 0, 1, \ ..., n, \ ... \tag{8.47}$$

Определение 8.34. Функция $S_X(\omega)$, определяемая пределом

$$S_X(\omega) = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{d_k}{\Delta\omega}, \tag{8.48}$$

называется *спектральной плотностью* стационарного случайного процесса $X(t)$.

Теорема 8.10. Корреляционная функция $K_X(s)$ и спектральная плотность $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса в формуле (8.45) связаны *прямым* и *обратным косинус-преобразованием Фурье*, т. е.

$$K_X(s) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega)\cos\omega s d\omega, \tag{8.49}$$

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} K_X(s)\cos\omega s ds . \tag{8.50}$$

Доказательство.

1. Запишем выражение для корреляционной функции (8.46) с учетом обозначений (8.47):

$$K_X(s) = \sum_{k=1}^{n} S_X(\omega_k)\cos\omega_k s \cdot \Delta\omega_k$$

и перейдем в нем к пределу при ранге дробления отрезка $[-T; T]$ $\lambda = \Delta\omega = \dfrac{\pi}{T} \to 0$.

Получим

$$K_X(s) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} S_X(\omega_k)\cos\omega_k s \cdot \Delta\omega_k = \int_0^{+\infty} S_X(\omega)\cos\omega s ds .$$

2. По определению спектральной плотности (8.48) и формулам Эйлера — Фурье (8.41) можно записать

$$S_X(\omega) = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{d_k}{\Delta\omega} = \lim_{\substack{\Delta\omega\to 0\\ T\to+\infty}} \frac{d_k}{\pi/T} = \lim_{\substack{T\to+\infty\\ \Delta\omega\to 0}} \frac{T}{\pi}\frac{2}{T}\int_0^{T} K_X(s)\cos\omega_k s ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} K_X(s)\cos\omega s ds .$$

Замечание

По аналогии с нормированной корреляционной функцией $r_X(s)$ вводится нормированная спектральная плотность $s_X(\omega)=\dfrac{S_X(\omega)}{D_X}$.

Теорема 8.11. Спектральная плотность $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ обладает следующими свойствами:

- свойство неотрицательности: $S_X(\omega)\ge 0$;
- свойство нормировки: $\int\limits_0^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = D_X$.

Доказательство.

1. Неотрицательность спектральной плотности следует из предельного перехода в неравенстве $S_X(\omega)=\lim\limits_{\Delta\omega\to 0}\dfrac{d_k}{\Delta\omega}\ge 0$, поскольку $d_k\ge 0$ и $\Delta\omega\ge 0$.
2. Условие нормировки следует из свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса $D_X = K_X(0)$. Поэтому по формуле (8.49)

$$\int\limits_0^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = \int\limits_0^{+\infty} S_X(\omega)\cos(0\cdot\omega)d\omega = K_X(0)=D_X.$$

Задача 8.28. Найти дисперсию стационарного случайного процесса $X(t)$, если известна его спектральная плотность $S_X(\omega)=\dfrac{12}{\pi(\omega^2+2\omega+2)}$.

Решение. Из условия нормировки спектральной плотности

$$D_X = \int\limits_0^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = \int\limits_0^{+\infty}\frac{12}{\pi(\omega^2+2\omega+2)}d\omega = \frac{12}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(\omega+1)^2+1}d\omega =$$

$$=\frac{12}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}(\omega+1)\Big|_0^{+\infty} = \frac{12}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=3.$$

Задача 8.29. Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция задана соотношениями:

$$K_X(s)=\begin{cases}1-|s|, & |s|<1;\\ 0, & |s|\ge 1.\end{cases}$$

Решение. Используя формулу

$$S_X(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} K_X(s)\cos\omega s ds$$

и учитывая, что $|s| = s$ в интервале $(0;1)$, получим

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-s)\cos\omega s ds = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-s)\, d\left(\frac{\sin\omega s}{\omega}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((1-s)\cdot\frac{\sin\omega s}{\omega} + \frac{-\cos\omega s}{\omega^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos\omega - 1}{\omega^2}\right) = \frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega).$$

Задача 8.30. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если его спектральная плотность задана соотношениями:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 2, & 1 \le \omega \le 5; \\ 0, & \omega \notin [1;5]. \end{cases}$$

Решение. Используя формулу

$$K_X(s) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega)\cos\omega s d\omega$$

и учитывая, что $S_X(\omega) \ne 0$ только в интервале $(1;5)$, получим

$$K_X(s) = \int_1^5 2\cos\omega s d\omega = 2\left(\frac{\sin\omega s}{s}\right)\Bigg|_1^5 = \frac{2}{s}(\sin 5s - \sin s) = 4\frac{\sin 2s\cdot\cos 3s}{s}.$$

Поскольку

$$K_X(s) = 4\frac{\sin 2s\cdot\cos 3s}{s} \underset{s\to\infty}{\to} 0,$$

случайный процесс является эргодическим.

Иногда удобно рассматривать спектральное разложение случайного процесса в комплексной форме, считая $\omega \in (-\infty; +\infty)$.

Спектральной плотностью случайного процесса в комплексной форме называется функция

$$S_X^*(\omega) = \frac{1}{2}S_X(|\omega|),$$

для которой справедливы свойства:

- $S_X^*(-\omega) = S_X^*(\omega)$ — четность;
- $S_X^*(\omega) = \frac{1}{2}S_X(\omega)$, при $\omega > 0$.

Спектральная плотность $S_X^*(\omega)$ связана с корреляционной функцией прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$K_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X^*(\omega)e^{i\omega s}d\omega; \qquad (8.51)$$

$$S_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_X(s) e^{-i\omega s} ds\ . \tag{8.52}$$

Задача 8.31. Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция равна $K_X(s) = d \cdot e^{-a|s|}$.

Решение. Используя формулу (8.52), получим:

$$S_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_X(s) e^{-i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\cdot e^{-a|s|} e^{-i\omega s} ds = \frac{d}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{as} e^{-i\omega s} ds + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-as} e^{-i\omega s} ds\right) =$$

$$= \frac{d}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)s} ds + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\omega)s} ds\right) = \frac{d}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{(a-i\omega)s}}{a-i\omega}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(a+i\omega)s}}{a+i\omega}\right|_{0}^{\infty}\right) =$$

$$= \frac{d}{2\pi}\left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right) = \frac{d}{2\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+\omega^2} = \frac{d\cdot a}{\pi\left(a^2+\omega^2\right)}\ .$$

Учитывая, что $S_X^*(\omega) = \frac{1}{2} S_X(|\omega|)$, получим спектральную плоскость:

$$S_X(\omega) = \frac{2d\cdot a}{\pi\left(a^2+\omega^2\right)}\ .$$

Теорема 8.12. Стационарный случайный процесс $X(t)$ можно представить разложением

$$X(t) = m_X + \int\limits_{0}^{+\infty} U(\omega)\cos\omega t d\omega + \int\limits_{0}^{+\infty} V(\omega)\sin\omega t d\omega\,, \tag{8.53}$$

где $U(\omega), V(\omega)$ — случайные функции непрерывного неслучайного аргумента; ω — частоты; $m_U(\omega) = m_V(\omega) = 0$; $K_{UV}(\omega_1, \omega_2) = 0$. Это разложение называется *интегральным каноническим разложением* стационарного случайного процесса.

Доказательство. Запишем спектральное разложение процесса с дискретным спектром (8.44) в следующем виде:

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{n} \frac{U_k}{\Delta\omega_k}\cos\omega_k t\cdot\Delta\omega_k + \frac{V_k}{\Delta\omega_k}\sin\omega_k t\cdot\Delta\omega_k \tag{8.54}$$

и определим случайные функции $U(\omega), V(\omega)$ через пределы в среднеквадратическом:

$$U(\omega) = \lim_{\Delta\omega_k\to 0}\frac{U_k}{\Delta\omega_k},\ V(\omega) = \lim_{\Delta\omega_k\to 0}\frac{V_k}{\Delta\omega_k}\,. \tag{8.55}$$

Если перейти в формуле (8.54) к пределу в среднеквадратичном при $T\to+\infty$ и

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{T} = \Delta\omega \to 0\,,$$

то по определению интеграла от случайного процесса получим соотношение (8.53).

Задача 8.32. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если его спектральная плотность $S_X(\omega) = S_0 = \text{const}$.

Решение. Скалярный стационарный случайный процесс, у которого спектральная плотность постоянная, называется *белым шумом*. Найдем корреляционную функцию белого шума, используя для удобства формулу (8.51) со спектральной плотностью случайного процесса в комплексной форме

$$K_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X^*(\omega) e^{i\omega s} d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega s}\, d\omega .$$

Поскольку для δ-функции Дирака

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \neq 0; \\ +\infty, & s = 0 \end{cases}$$

справедливо свойство $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega s}\, d\omega = \delta(s)$, то $K_X(s) = 2\pi S_0 \delta(s)$.

Замечание

Задачи 8.33 и 8.34 предлагается решить самостоятельно.

Задача 8.33. Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция задана соотношениями:

$$K_X(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|s|, & |s| < 2; \\ 0, & |s| \geq 2. \end{cases}$$

Задача 8.34. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если его спектральная плотность задана соотношениями:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 1, & -1 \leq \omega \leq 1; \\ 0, & \omega \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

Является ли случайный процесс эргодическим?

8.8. Марковские процессы с дискретными состояниями

Определение 8.35. Марковский скалярный случайный процесс $X(\omega, t)$, $t \in T = [a; b]$, называется *марковским процессом с дискретными состояниями*, если для любого фиксированного момента времени $t_k \in T$ случайная величина $X(\omega, t_k)$ (сечение случайного процесса) является дискретной.

Пусть S — некоторая физическая система с возможными дискретными состояниями $S_1, S_2, ..., S_n$, которая случайным образом в некоторый момент времени t_k,

$k = 1, 2, ..., n, ...$ в результате испытания может перейти (мгновенно) из одного состояния в другое. Момент времени t_k, $k = 1, 2, ..., n, ...$ называют k-м шагом по времени. Пусть условная вероятность $p_{ij}(k)$ того, что на k-м шаге по времени (в k-м испытании) система находится в состоянии S_j при условии, что на $(k-1)$-м шаге по времени (после $(k-1)$-го испытания) она находилась в состоянии S_i, не зависит от состояния системы на более ранних шагах по времени (от результатов ранее проведенных испытаний). Функционирование такой системы представляет собой случайный процесс, который является марковским с дискретными состояниями.

При исследовании марковских процессов с дискретными состояниями изображают возможные состояния системы в виде графа состояний, а возможные переходы системы из одного состояния в другое указывают на графе стрелками.

Пример. Техническая система S состоит из двух узлов с номерами 1 и 2, каждый из которых в процессе работы может выйти из строя. Возможные состояния системы: S_1 — оба узла работают; S_2 — узел 1 работает, а узел 2 нет; S_3 — узел 2 работает, а узел 1 нет; S_4 — оба узла отказали.

Граф состояний для такой системы показан на рис. 8.8 в предположении, что ремонт в процессе функционирования системы не проводится.

Классификация состояний графа:

1. Источник — система может только выйти из этого состояния. На рис. 8.8 S_1 — источник.
2. Поглощающее состояние — система может попасть в него, но не может выйти. На рис. 8.8 это состояние S_4.
3. Транзитивное состояние — система может как войти в него, так и выйти. На рис. 8.8 это состояния S_2 и S_3.

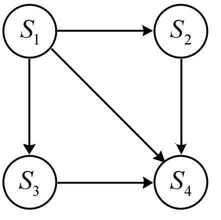

Рис. 8.8

8.9. Марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем. Цепи Маркова

Определение 8.36. *Цепью Маркова* называется марковский случайный процесс с дискретными состояниями (сечениями) и дискретным временем.

Множество состояний может быть конечным или счетным. Время случайного процесса может быть непрерывным, а моменты измерений времени t_k — дискретными и случайными.

Предположим, что некоторая система может находиться в состояниях

$$S_1, S_2, S_3, ..., S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, ..., S_n.$$

Переход из состояния S_i в состояние S_j в момент времени t_k осуществляется с некоторой вероятностью, называемой *вероятностью перехода* или *переходной вероятностью*, и обозначается

$$p_{ij}(k),\ i, j = 1, 2, ..., n,\ k = 0, 1, 2, ...$$

Вероятность того, что в момент времени t_k система находилась в состоянии S_i, обозначается

$$p_i(k),\ i = 1, 2, ..., n,\ k = 0, 1, 2, ...$$

Вероятность того, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ система находилась в состоянии S_i, называется *начальной вероятностью* и обозначается

$$p_i(0),\ i = 1, 2, ..., n .$$

Поскольку в каждый момент времени система находится в одном из своих возможных состояний, то соответствующие события образуют полную группу. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1,\ k = 0, 1, 2, ... \tag{8.56}$$

Кроме того, если в каждый момент времени t_k система из состояния S_i перейдет в одно из состояний S_j при $j = 1, 2, ..., n$, то соответствующие события также образуют полную группу. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1,\ i = 1, 2, ..., n,\ k = 0, 1, 2, ... \tag{8.57}$$

Начальные вероятности $p_i(0)$, $i = 1, 2, ..., n$ можно рассматривать как компоненты вектора-строки начальных вероятностей:

$$\vec{p}(0) = \big(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0)\big), \tag{8.58}$$

а все вероятности перехода в момент времени t_k записать в виде квадратной матрицы n-го порядка, которая называется *матрицей переходных вероятностей*:

$$\mathbf{P}(k) = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & ... & p_{1j}(k) & ... & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & ... & p_{2j}(k) & ... & p_{2n}(k) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ p_{i1}(k) & p_{11}(k) & ... & p_{ij}(k) & ... & p_{in}(k) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & ... & p_{nj}(k) & ... & p_{nn}(k) \end{pmatrix}. \tag{8.59}$$

Для матрицы переходных вероятностей справедливы свойства:

- все $p_{ij}(k) \ge 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$; $k = 0, 1, 2, ...$;
- для каждой строки матрицы выполняются соотношения (8.57), т. е. суммы элементов в каждой строке равны единице.

Матрицы, удовлетворяющие этим двум свойствам, называются *стохастическими*. На главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят *вероятности задержки системы в состоянии* S_i *на k-м шаге*. Если известны все элементы *i*-й строки, кроме диагонального, то вероятность $p_{ii}(k)$ определяется из условия (8.57):

$$p_{ii}(k) = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} p_{ij}(k), \; i = 1, 2, ..., n, \; k = 1, 2, ... \tag{8.60}$$

Определение 8.37. Цепь Маркова называется *простой*, если *k*-й шаг системы зависит только от того, в каком состоянии система находилась на $(k-1)$-м шаге.

Определение 8.38. Цепь Маркова называется *однородной,* если переходные вероятности не зависят от номера шага, т. е. $p_{ij}(k) = p_{ij}$, при всех $i, j = 1, 2, ..., n$, $k = 0, 1, 2, ...$

Замечание

В дальнейшем мы будем рассматривать только простые однородные цепи Маркова. Для однородных цепей Маркова матрица вероятностей перехода не зависит от номера шага, т. е. $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}$ в формуле (8.59).

Теорема 8.13. Если даны начальные вероятности $p_i(0)$, $i = 1, 2, ..., n$ и матрица переходных вероятностей (8.59) однородной цепи Маркова, то справедлива рекуррентная формула:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) \cdot p_{ij}, \; j = 1, 2, ..., n, \; k = 1, 2, ... \tag{8.61}$$

Замечание

Формула (8.61) дает распределение вероятностей системы на *k*-м шаге и является частным случаем уравнений Маркова для вероятностей перехода из одного состояние в другое за несколько шагов.

Формулу (8.61) можно записать в матричном виде

$$\vec{p}(k) = \vec{p}(k-1) \cdot \mathbf{P}, \; k = 0, 1, 2, ... \tag{8.62}$$

где вектор-строка $\vec{p}(k) = (p_1(k), p_2(k), ..., p_n(k))$ — распределение вероятностей на k-м шаге; вектор-строка $\vec{p}(k-1) = (p_1(k-1), p_2(k-1), ..., p_n(k-1))$ — распределение вероятностей на $(k-1)$-м шаге; $\mathbf{P}$ — матрица переходных вероятностей.

Если известна матрица переходных вероятностей, то работу системы можно описывать *размеченным графом состояний*, приписывая стрелкам на графе известные вероятности перехода. При этом вероятности задержки системы, как получающиеся автоматически из (8.60), не указываются.

Задача 8.35. Задана матрица переходных вероятностей некоторой системы:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,7 & 0,2 & 0,1\\ 0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

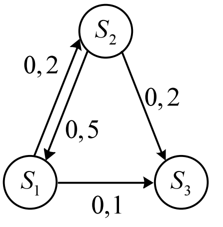

Рис. 8.9

Составить соответствующий размеченный граф и по заданному вектору начальных вероятностей $\vec{p}(0)=(1\,;0;0)$ найти распределение вероятностей на втором шаге.

Решение. На рис. 8.9 показан граф состояний системы, где отмечены все возможные переходы и вероятности переходов.

Найдем распределение вероятностей в системе на первом шаге по формуле (8.62):

$$\vec{p}(1)=\vec{p}(0)\cdot\mathbf{P}=(1;\quad 0;\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}0,7 & 0,2 & 0,1\\ 0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(0,7;\quad 0,2;\quad 0,1).$$

Аналогично найдем распределение вероятностей на втором шаге:

$$\vec{p}(2)=\vec{p}(1)\cdot\mathbf{P}=(0,7;\quad 0,2;\quad 0,1)\cdot\begin{pmatrix}0,7 & 0,2 & 0,1\\ 0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(0,59;\quad 0,2;\quad 0,21).$$

Для распределения вероятностей $\vec{p}(2)$ за два шага справедливо соотношение

$$\vec{p}(2)=\vec{p}(0)\cdot\mathbf{P}^2,\ k=0,1,2,...,$$

поскольку, обозначая $p_{ij}^{(2)}$ вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j за два шага, а $p_{ik}^{(1)}$ — вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_k за один шаг и $p_{kj}^{(1)}$ — вероятности перехода из состояния S_k в состояние S_j за один шаг, по формуле полной вероятности можно записать

$$p_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}^{(1)}\cdot p_{kj}^{(1)}.$$

Следовательно, для матрицы перехода за два шага $\mathbf{P}^{(2)}$ справедливо $\mathbf{P}^{(2)}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}^2$. В общем случае матрица перехода системы из состояния S_i в состояние S_j за m шагов имеет вид

$$\mathbf{P}^{(m)}=\mathbf{P}^m\text{, где }\mathbf{P}^m=\underbrace{\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\cdots\mathbf{P}}_{m}.$$

Если требуется найти распределение вероятностей за m шагов, его определяют из матричного уравнения:

$$\vec{p}(m) = \vec{p}(0) \cdot \mathbf{P}^m, \ k = 0, 1, 2, ... \qquad (8.63)$$

где $\mathbf{P}^m = \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdots \mathbf{P}}_{m}$ — матрица перехода за m шагов.

Определение 8.39. Цепь Маркова называется *эргодической*, если из любого ее состояния можно попасть в любое другое состояние, т. е. все состояния достижимы.

Эргодические цепи Маркова делятся на два класса: *регулярные* (ациклические) и *нерегулярные* (циклические).

Замечание

Эргодичность цепи Маркова можно легко выяснить по виду матрицы переходных вероятностей. Необходимым и достаточным условием регулярности цепи Маркова является существование такого шага m_0, что все элементы матриц $\mathbf{P}^m$ при $m > m_0$ становятся ненулевыми.

Теорема 8.14 (теорема Маркова). Для регулярной эргодической цепи Маркова вероятности $p_{ij}^{(m)}$ перехода из состояния S_i в состояние S_j за m шагов имеют предельные значения p_j при $m \to \infty$, т. е.

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)} = p_j, \ i, j = 1, 2, ..., n, \qquad (8.64)$$

или в матричном виде

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}^{(m)} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \qquad (8.65)$$

где вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$ называются *финальными вероятностями*.

Замечание 1

Теорема Маркова показывает, что при достаточно большом числе шагов распределение вероятностей не зависит от номера шага, т. е. работу системы можно считать стационарной.

Задача 8.36. Некоторое устройство может находиться в одном из трех состояний:

- S_1 — готово к использованию;
- S_2 — диагностика;
- S_3 — ремонтируется.

Вычислить предельные вероятности заданной цепи Маркова, установив номер шага, начиная с которого процесс становится стационарным, если работа системы показана на рис. 8.10.

Решение.

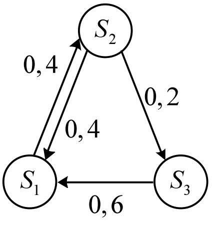

Рис. 8.10

1-й способ. На рис. 8.10 показан граф состояний системы, где отмечены все возможные переходы из одного состояния в другое и переходные вероятности (размеченный граф).

Составим матрицу переходных вероятностей — матрицу третьего порядка.

1. Поскольку $p_{12} = 0,4$, $p_{13} = 0$, то $p_{11} = 1 - 0,4 = 0,6$.
2. Из того, что $p_{21} = 0,4$, $p_{23} = 0,2$, следует, что $p_{22} = = 1 - 0,4 - 0,2 = 0,4$.
3. $p_{31} = 0,6$, $p_{32} = 0$; следовательно, $p_{33} = 0,4$.

Поэтому матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что в начальный момент устройство находилось в состоянии S_1, т. е. начальное распределение вероятностей имеет вид $\vec{p}(0) = (1;\ 0;\ 0)$. Найдем распределение вероятностей на первом шаге

$$\vec{p}(1) = (1; 0; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix} = (0,6; 0,4; 0),$$

а затем на втором

$$\vec{p}(2) = (0,6; 0,4; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix} = (0,52; 0,4; 0,08).$$

Аналогично можно найти распределения вероятностей на следующих шагах. Проведем вычисление в пакете Mathcad (рис. 8.11).

Из листинга на рис. 8.11 ясно, что, начиная с шага $k = 5$, случайный процесс становится стационарным, а вектор-строка предельных вероятностей имеет вид:

$$\vec{p}^{(5)} = (0,529;\ 0,353;\ 0,118).$$

2-й способ. Предельные вероятности можно найти, учитывая формулу (8.65) и то, что $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$. Из теоремы Маркова следует, что распределение вероятностей состояний при достаточно большом числе шагов не зависит от номера шага. Иначе говоря, начиная с некоторого достаточно большого m, степень матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}^m$ становится постоянной и строками ее являются финальные вероятности перехода. Поэтому найти финальные вероятности можно, вычисляя степени матрицы. При этом проверяется и регулярность цепи Маркова, а ее эргодичность определяется из вида графа состояний, показанного на рис. 8.10, из кото-

$$p0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P := \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$p1 := p0 \cdot P \qquad p1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p2 := p1 \cdot P \qquad p2 = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.4 & 0.08 \end{bmatrix}$$

$$p3 := p2 \cdot P \qquad p3 = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.368 & 0.112 \end{bmatrix}$$

$$p4 := p3 \cdot P \qquad p4 = \begin{bmatrix} 0.526 & 0.355 & 0.118 \end{bmatrix}$$

$$p5 := p4 \cdot P \qquad p5 = \begin{bmatrix} 0.529 & 0.353 & 0.118 \end{bmatrix}$$

$$p6 := p5 \cdot P \qquad p6 = \begin{bmatrix} 0.529 & 0.353 & 0.118 \end{bmatrix}$$

Рис. 8.11

$$P := \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \qquad P^2 = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.4 & 0.08 \\ 0.52 & 0.32 & 0.16 \\ 0.6 & 0.24 & 0.16 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.368 & 0.112 \\ 0.536 & 0.336 & 0.128 \\ 0.552 & 0.336 & 0.112 \end{bmatrix} \qquad P^4 = \begin{bmatrix} 0.526 & 0.355 & 0.118 \\ 0.533 & 0.349 & 0.118 \\ 0.533 & 0.355 & 0.112 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.529 & 0.353 & 0.118 \\ 0.53 & 0.353 & 0.117 \\ 0.529 & 0.355 & 0.116 \end{bmatrix} \qquad P^6 = \begin{bmatrix} 0.529 & 0.353 & 0.118 \\ 0.529 & 0.353 & 0.117 \\ 0.529 & 0.354 & 0.117 \end{bmatrix}$$

$$P^7 = \begin{bmatrix} 0.529 & 0.353 & 0.118 \\ 0.529 & 0.353 & 0.118 \\ 0.529 & 0.353 & 0.118 \end{bmatrix} \qquad P^8 = \begin{bmatrix} 0.529 & 0.353 & 0.118 \\ 0.529 & 0.353 & 0.118 \\ 0.529 & 0.353 & 0.118 \end{bmatrix}$$

Рис. 8.12

рого ясно, что все состояния достижимы. Решение задачи выполнено в пакете Mathcad Prime и показано на рис. 8.12.

Замечание

Если матрица переходных вероятностей стохастическая и имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

то любая ее степень $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}$, т. е. равна самой матрице. Следовательно, финальные вероятности — это вероятности перехода с такой матрицей за один шаг.

Показанные два способа определения финальных вероятностей сложно реализовать при ручном счете. Поэтому для их вычисления получают систему на основе рекуррентной формулы (8.61)

$$p_j(m) = \sum_{i=1}^{n} p_i(m-1) \cdot p_{ij}, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{8.66}$$

которая дает распределения вероятностей на m-м шаге. Учитывая, что при достаточно большом m по теореме Маркова выполняется соотношение

$$p_j(m) = p_j(m-1) = p_j,$$

рекуррентную формулу (8.66) можно записать в виде

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot p_{ij} \text{ или } \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot p_{ij} - p_j = 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{8.67}$$

Линейная однородная система (8.67) имеет бесконечно много решений. Для того чтобы найти единственное ненулевое решение, любое уравнение системы заменяют условием нормировки (8.56), т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Если условием нормировки заменить первое уравнение системы (8.67), то финальные вероятности могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot p_{ij} - p_j = 0, \ j = 2, 3, ..., n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1, \end{cases} \tag{8.68}$$

которая для однородной цепи Маркова с тремя состояниями и матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

примет вид

$$\begin{cases} p_{12} \cdot p_1 + (p_{22} - 1) \cdot p_2 + p_{32} \cdot p_3 = 0; \\ p_{13} \cdot p_1 + p_{23} \cdot p_2 + (p_{33} - 1) \cdot p_3 = 0; \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \tag{8.69}$$

Задача 8.37. Найти предельные вероятности цепи Маркова, матрица переходных вероятностей которой имеет вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Эта задача решалась другими способами (см. задачу 8.36). Составим для данной матрицы систему (8.69).

$$\begin{cases} 0,4p_1 - 0,6p_2 + 0p_3 = 0; \\ 0p_1 + 0,2p_2 - 0,6p_3 = 0; \\ \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Если записать систему в матричном виде $\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ — матрица этой системы, $\mathbf{B}$ — вектор правых частей:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то вектор финальных вероятностей $\mathbf{F}$ определяется как решение матричного уравнения, т. е. $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Решение выполнено в пакете Mathcad Prime и показано на рис. 8.13.

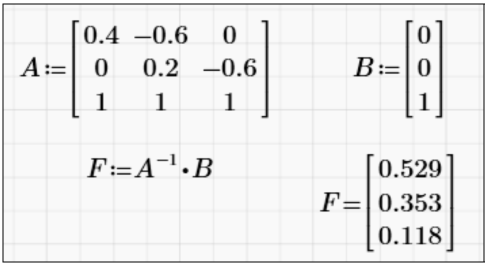

Рис. 8.13

8.10. Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова

Марковский случайный процесс в системе S с дискретными состояниями $S_1, S_2, ..., S_n$ является *случайным процессом с непрерывным временем*, если моменты перехода системы из состояния S_i в состояние S_j случайны.

Обозначим через A_k^t случайное событие, состоящее в том, что в момент времени $t \in T = [a; b]$ система S находится в состоянии S_k, а вероятность реализации этого события обозначим

$$p_k(t) = P\left(A_k^t\right), \ t \in T.$$

В этом случае вектор вероятностей состояний

$$\mathbf{p}(t) = \left(p_1(t), \quad p_2(t), \quad \ldots \quad p_n(t)\right)^T$$

определяет вероятности состояний системы S в момент времени $t \in T$. Поскольку в любой фиксированный момент времени t случайные события $A_1^t, A_2^t, \ldots, A_n^t$ образуют полную группу, то

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(t) = 1, \ t \in T. \tag{8.70}$$

Определение 8.40. Пусть S — некоторая система с возможными дискретными состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_n$. *Плотностью вероятности перехода* этой системы из состояния S_i в состояние S_j в момент времени t называется число

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}, \tag{8.71}$$

где $P_{ij}(t;\Delta t)$ — вероятность того, что система S, находящаяся в момент времени t в состоянии S_i, за время $\Delta t > 0$ перейдет в состояние S_j.

Поскольку $P_{ij}(t;\Delta t) = P\left(A_j^{t+\Delta t} \middle| A_i^t\right)$, то из формулы (8.71) с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δt, следует, что условная вероятность

$$P\left(A_j^{t+\Delta t} \middle| A_i^t\right) = \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t$$

и, следовательно, плотности вероятностей перехода неотрицательны, т. е. $\lambda_{ij}(t) \ge 0$, $t \in T$.

Определение 8.41. Скалярный марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, описывающий поведение системы S, называется *однородным*, если для любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$ плотности вероятностей перехода постоянные, т. е. $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} = \text{const}$, $t \in T$. В противном случае марковский процесс называется *неоднородным*.

Теорема 8.15. Пусть S — некоторая система с возможными дискретными состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_n$, а процесс изменения состояний системы является марковским случайным процессом. Если для каждой пары возможных состояний S_i и S_j определены плотности вероятностей перехода $\lambda_{ij}(t)$ и $\lambda_{ji}(t)$, то вероятности состояний системы $p_k(t)$ удовлетворяют *системе уравнений Колмогорова*:

$$\frac{d\,p_k(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n} \lambda_{ik}(t) \cdot p_i(t) - p_k(t) \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n} \lambda_{ki}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.72}$$

Система уравнений Колмогорова (8.72) избыточна, поскольку вероятности состояний системы $p_k(t)$ удовлетворяют соотношению (8.70). Этим равенством можно заменить любое уравнение системы.

Если ввести матрицу плотностей вероятностей перехода

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix} \lambda_{11}^*(t) & \lambda_{21}(t) & \ldots & \lambda_{n1}(t) \\ \lambda_{12}(t) & \lambda_{22}^*(t) & \ldots & \lambda_{n2}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1n}(t) & \lambda_{2n}(t) & \ldots & \lambda_{nn}^*(t) \end{pmatrix}, \tag{8.73}$$

где диагональные элементы определяются по формуле $\lambda_{kk}^*(t)=-\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_{ki}(t)$, $k=1,2,\ldots,n$, то систему уравнений Колмогорова (8.70) можно записать в матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}=\Lambda(t)\cdot\mathbf{p}(t), \tag{8.74}$$

где $\mathbf{p}(t)=\left(p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t)\right)^T$ — вектор вероятностей состояний системы в момент времени t.

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8.72) или систему в матричном виде (8.74) решают, задавая начальные условия $\mathbf{p}(0)=\mathbf{p}^0=\left(p_1^0\ \ p_2^0\ \ \ldots\ \ p_n^0\right)^T$, определяющие состояние системы в момент времени $t=0$, т. е. решают задачу Коши в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{p}(t)}{dt}=\Lambda(t)\cdot\mathbf{p}(t); \\ \mathbf{p}(t)=\mathbf{p}^0. \end{cases} \tag{8.75}$$

Если элементы матрицы $\Lambda(t)$ непрерывны при $t>0$, то задача Коши (8.75) имеет единственное решение, и следовательно, вектор вероятностей состояний системы определен однозначно в любой момент времени $t>0$.

Теорема 8.16. Решение задачи Коши (8.75) для матричного уравнения Колмогорова при любом векторе вероятностей начальных состояний системы имеет неотрицательные компоненты, т. е. для вектора $\mathbf{p}(t)=\left(p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t)\right)^T$ справедливо $p_k(t)\geq 0$, $k=1,2,\ldots,n$, при любом $t\in T$.

Теорема 8.17. Если процесс изменения состояния системы S представляет собой однородный марковский процесс с дискретными состояниями, то $p_k(t)>0$ при всех $k=1,2,\ldots,n$ и любых $t\in T$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{ij}>0$ при всех $i,j=1,2,\ldots,n$, иначе говоря, тогда и только тогда, когда по графу состояний можно перейти из любого состояния S_i в состояние S_j за конечное число шагов.

При исследовании однородных марковских процессов с дискретными состояниями важным является вопрос: становится ли он с течением времени стационарным, т. е. система случайно переходит из одного состояния в другое, но вероятности, с которыми она находится в каждом возможном состоянии, не зависят от времени? В этом случае вектор вероятностей состояний постоянный: $\mathbf{p}=(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)^T$.

Определение 8.42. Пусть $S_1, S_2, ..., S_n$ — возможные состояние системы S, а ее функционирование представляет собой однородный марковский случайный процесс с дискретными состояниями. Пусть $\mathbf{p}(t)=(p_1(t),\ p_2(t),\ ...,\ p_n(t))^T$, $t\in T$ — вектор вероятностей состояний системы. Вектор $\mathbf{p}=(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)^T$ называется *вектором предельных вероятностей состояний системы*, если существует предел

$$\mathbf{p}=\lim_{t\to\infty}\mathbf{p}(t). \qquad (8.76)$$

Оставляя в стороне вопрос условия существования предела (8.76), приведем теорему о нахождении вектора предельных вероятностей.

Теорема 8.18. Пусть $S_1, S_2, ..., S_n$ — возможные состояния системы S, а ее функционирование представляет собой однородный марковский случайный процесс с дискретными состояниями. Если для вектора вероятностей состояний системы $\mathbf{p}(t)=(p_1(t),\ p_2(t),\ ...,\ p_n(t))^T$, $t\in T$ существует предел (8.76), то вектор предельных вероятностей $\mathbf{p}=(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)^T$ определяется из системы

$$\begin{cases}\Lambda\cdot\mathbf{p}=0;\\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1,\end{cases} \qquad (8.77)$$

где матрица

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11}^* & \lambda_{21} & ... & \lambda_{n1}\\ \lambda_{12} & \lambda_{22}^* & ... & \lambda_{n2}\\ ... & ... & ... & ...\\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & ... & \lambda_{nn}^*\end{pmatrix},$$

$$\lambda_{kk}^*=-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_{ki}, \quad k=1, 2, ..., n.$$

Задача 8.38. Размеченный граф состояний системы S, для которого процесс перехода из одного состояния в другое представляет собой однородный марковский процесс, изображен на рис. 8.14. Найти предельные вероятности состояний системы.

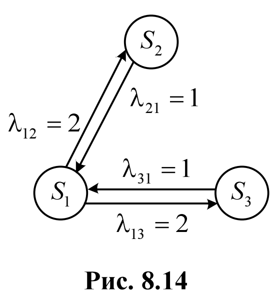

Рис. 8.14

Решение. По графу состояний на рис. 8.14 и формуле (8.73) составим матрицу плотностей вероятностей перехода системы из одного состояния в другое:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{12} - \lambda_{13} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -\lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{13} & 0 & -\lambda_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для компонентов вектора предельных вероятностей $\mathbf{p} = (p_1, \ p_2, \ ..., \ p_n)^T$, учитывая формулу (8.77), получим систему

$$\begin{cases} -4p_1 + p_2 + p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 \qquad = 0; \\ 2p_1 - \qquad p_3 = 0; \\ \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \tag{8.78}$$

Решение системы (8.78) выполнено методом Гаусса в пакете Mathcad Prime (рис. 8.15).

$$\Lambda := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rref}(\mathrm{augment}(\Lambda, B)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 8.15

Из рис. 8.15 ясно, что предельные вероятности состояний системы равны:

$$P\{S = S_1\} = 0{,}2, \quad P\{S = S_2\} = 0{,}4, \quad P\{S = S_3\} = 0{,}4 .$$

8.11. Задания для типовых расчетов

Задание 8.1. Исследовать реализации случайного процесса $X(t)$. Найти одномерный закон распределения $X(t)$, математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию. Является ли случайный процесс стационарным?

1. $X(t) = V \cdot t + 3$, V — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-2; 2]$.
2. $X(t) = V \cdot t$, V — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[1; 2]$.
3. $X(t) = 3V + t$, V — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[1; 2]$.
4. $X(t) = 3t \cdot V + 2$, V — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda = 2$.

5. $X(t) = (t+1) \cdot V$, случайная величина V — число бросаний монеты до первого выпадения герба.
6. $X(t) = 2V + e^t$, случайная величина V распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 3$ и $p = \frac{1}{3}$.
7. $X(t) = V \sin 2t$, случайная величина V распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 0{,}1$.
8. $X(t) = V \sin t$, случайная величина V принимает значения -1, 0, 1 соответственно с вероятностями $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$.
9. $X(t) = V \cdot (t+1)^2$, случайная величина V равномерно распределена на отрезке $[1; 3]$.
10. $X(t) = V + 2t$, случайная величина V равномерно распределена на отрезке $[4; 6]$.
11. $X(t) = V \sin t$, случайная величина V принимает значения -1, 0, 1 соответственно с вероятностями $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
12. $X(t) = V \cos t$, случайная величина V принимает значения 1, 2, 3, 4 соответственно с вероятностями 0,5; 0,1; 0,2; 0,2.
13. $X(t) = V e^{-t}$, случайная величина V распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.
14. $X(t) = (t-2) \cdot V + 5$, V — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda = 2$.
15. $X(t) = U \cdot t$, U — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = -1$ и $\sigma = \frac{1}{2}$.
16. $X(t) = U \cdot (\cos t + \sin t)$, U — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-2; 2]$.
17. $X(t) = 2\cos(t + \Phi)$, Φ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 2\pi]$.
18. $X(t) = U \cdot t + 3$, U — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 2\pi]$.
19. $X(t) = U \cdot t^2$, U — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.

20. $X(t)=U\cdot t+V$, U и V — независимые дискретные случайные величины, U принимает значения -1 и 1 с вероятностями 0,5 и 0,5 соответственно, а V принимает значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0,25; 0,5 и 0,25.
21. $X(t)=U\cdot\cos t+V\cdot\sin t$, U и V — независимые дискретные случайные величины, принимающие значения -1 и 1 с вероятностями 0,5 и 0,5 соответственно.
22. $X(t)=\cos(2t+\Phi)$, Φ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-\pi;\pi]$.
23. $X(t)=\sin 2t+V$, V — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;2]$.
24. $X(t)=U\cdot e^{-t}$, U — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=1$ и $\sigma=\frac{1}{2}$.
25. $X(t)=V\cdot\sin 2t$, V — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda=2$.
26. $X(t)=2\sin(U\cdot t)$, U — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;1]$.
27. $X(t)=U\cdot\ln t$, U — случайная величина, принимающая значения 1 и 2 с вероятностями 0,5.
28. $X(t)=2\cdot e^{-U\cdot t}$, U — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;2]$.
29. $X(t)=U\cdot(t+1)^2$, U — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[1;3]$.
30. $X(t)=U\cdot(t+1)^2$, U — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda=2$.
31. $X(t)=U\cdot(t+1)^2$, U — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$.

Задание 8.2

1. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Z(t)=\int\limits_0^t X(u)\,du$, если $m_X(t)=0,2\cos^2\omega t$, $K_X(t_1,t_2)=$ $=0,4\cos\omega t_1\cos\omega t_2$.
2. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Z(t)=\int\limits_0^t X(u)\,du$, если $X(t)=t+U\cos t+V\sin t$, где U и V —

независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными 0,2.

3. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}$, если $X(t)=2+t+U\cdot t^2+V\cdot t^3$, где U и V — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными 0,1.
4. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Z(t)=X(t)+\frac{dX(t)}{dt}$, если $m_X(t)=0,2\cos^2 t$, $K_X(t_1,t_2)=$ $=0,4\cos t_1\cos t_2$.
5. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Z(t)=\int_0^t X(u)\,du$, если $m_X(t)=3e^{-t}$, $K_X(t_1,t_2)=e^{-t_1-t_2}$.
6. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}$, если $X(t)=U\cdot e^{-t}$, где U — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=3$ и $\sigma=1$.
7. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Z(t)=\int_0^t X(u)\,du$, если $X(t)=U\cdot(t^2+1)$, где U — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=-3$ и $\sigma=5$.
8. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}$, если $m_X(t)=3\cos t-1$, $K_X(t_1,t_2)=e^{-4(t_2-t_1)^2}$.
9. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}$, если $X(t)=U\cdot e^{-t}$, где U — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=3$ и $\sigma=1$.
10. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=t\cdot\frac{dX(t)}{dt}+1$, если $m_X(t)=t$, $K_X(t_1,t_2)=e^{2(t_1+t_2)}$.
11. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=t^2\cdot\frac{dX(t)}{dt}+t^2e^{-t}+2t$, если $m_X(t)=e^{-t}$, $K_X(t_1,t_2)=$ $=\sin t_1\sin t_2$.

12. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Z(t)=t^2\int\limits_0^t X(u)\,du+3t$, если $m_X(t)=t^2-5$, $K_X(t_1,t_2)=$ $=2\sin 3t_1 \sin 3t_2$.
13. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$, если $m_X(t)=\cos 7t$, $K_X(t_1,t_2)=7t_1t_2+\dfrac{1}{7}t_1^4t_2^4$.
14. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$, если $m_X(t)=2t+1$, $K_X(t_1,t_2)=3e^{-(t_2-t_1)}$.
15. На вход интегрирующего устройства поступает случайный процесс, заданный каноническим разложением $X(t)=1+U\cdot t+V\cdot t^2$, $D(U)=5$, $D(V)=2$. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса на выходе интегратора.
16. Задана корреляционная функция $K_X(s)=2e^{-0,5s^2}$, $a\in R$, стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $Y(t)=\sin t\cdot\dfrac{dX(t)}{dt}+4$.
17. Задана корреляционная функция $K_X(s)=a^2e^{-(as)^2}$, $a\in R$, стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$.
18. Найти дисперсию случайного процесса $Z(t)=\int\limits_0^t X(u)du$, зная корреляционную функцию $K_X(s)=\dfrac{1}{1+s^2}$ стационарного случайного процесса $X(t)$.
19. Задана корреляционная функция $K_X(s)=e^{-|s|}(\cos s+\sin|s|)$ нормального стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти дисперсию случайного процесса $Y(t)=\dfrac{dX}{dt}$.
20. Найти корреляционную функцию случайного процесса $Y(t)=X(t)+\dfrac{dX(t)}{dt}$, зная корреляционную функцию $K_X(s)=e^{-s^2}$ стационарного случайного процесса $X(t)$.

21. Задана корреляционная функция $K_X(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2^2$ случайного процесса $X(t)$. Найти взаимные корреляционные функции случайных процессов $X(t)$ и $Z(t) = \int_0^t X(u)\,du$.

22. Задана корреляционная функция $K_X(t_1, t_2) = e^{-(t_2 - t_1)^2}$ случайного процесса $X(t)$. Найти взаимные корреляционные функции случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$.

23. Найти математическое ожидание случайного процесса $Z(t) = (t^2 + 1)\int_0^t X(u)\,du$, если $X(t) = U\cos^2 t$, где случайная величина U равномерно распределена на отрезке $[0; 4]$.

24. Найти корреляционную функцию случайного процесса $Z(t) = \int_0^t X(u)\,du$, если $X(t) = U\cos^2 t$, где случайная величина U равномерно распределена на отрезке $[-2; 2]$.

25. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если его спектральная плотность задана соотношениями:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 3, & 0 \le \omega \le 2; \\ 0, & \omega \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Является ли случайный процесс эргодическим?

26. Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция задана соотношениями:

$$K_X(s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{3}|s|, & |s| < 3; \\ 0, & |s| \ge 3. \end{cases}$$

27. Найти дисперсию стационарного случайного процесса $X(t)$, если известна его спектральная плотность $S_X(\omega) = \dfrac{6}{\pi(1 + \omega^2)}$.

28. Найти дисперсию стационарного случайного процесса $X(t)$, если известна его спектральная плотность $S_X(\omega) = \dfrac{a^2|\omega|}{(a^2 + \omega^2)^2}$.

29. Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция задана соотношениями:

$$K_X(s)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{5}|s|, & |s|<5;\\ 0, & |s|\ge 5.\end{cases}$$

30. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если его спектральная плотность задана соотношениями:

$$S_X(\omega)=\begin{cases}2, & 2\le\omega\le 4;\\ 0, & \omega\notin[2;4].\end{cases}$$

Является ли случайный процесс эргодическим?

Задание 8.3. По заданной стохастической матрице переходных вероятностей цепи Маркова составить размеченный граф состояний и выяснить, является ли цепь Маркова эргодической и регулярной. Найти финальные вероятности.

1. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,1 & 0,4\\ 0,2 & 0,1 & 0,7\\ 0,4 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 0,6 & 0,4\\ 0,2 & 0,3 & 0,5\\ 0,7 & 0 & 0,3\end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0,4 & 0,3 & 0,3\\ 0,5 & 0,1 & 0,4\end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,5 & 0,1 & 0,4\end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,2 & 0,5 & 0,3\\ 0,3 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix}$.

6. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7 & 0\\ 0,4 & 0,3 & 0,3\\ 0,3 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,4 & 0,1\\ 0,4 & 0,3 & 0,3\\ 0,6 & 0 & 0,4\end{pmatrix}$.

8. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0,1 & 0,6 & 0,3\\ 0,2 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$.

9. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,7 & 0 & 0,3\\ 0,3 & 0,4 & 0,3\\ 0,5 & 0,5 & 0\end{pmatrix}$.

10. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4 & 0\\ 0 & 0,7 & 0,3\\ 0,2 & 0,5 & 0,3\end{pmatrix}$.

11. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0 & 0,7\\ 0,2 & 0,5 & 0,3\\ 0,4 & 0,5 & 0,1\end{pmatrix}$.

12. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0 & 0,6 & 0,4\\ 0,4 & 0,6 & 0\end{pmatrix}$.

13. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7 & 0\\ 0 & 0,6 & 0,4\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\end{pmatrix}$.

14. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0 & 0,5 & 0,5\\ 0,4 & 0,6 & 0\end{pmatrix}$.

15. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,1 & 0,4\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

16. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

17. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 1 & 0 & 0\\ 0,1 & 0,6 & 0,3\end{pmatrix}$.

18. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,4 & 0,6 & 0\\ 0,6 & 0 & 0,4\\ 0,1 & 0,6 & 0,3\end{pmatrix}$.

19. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3 & 0\\ 0,6 & 0,4 & 0\\ 0,1 & 0,6 & 0,3\end{pmatrix}$.

20. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\\ 0,4 & 0,6 & 0\end{pmatrix}$.

21. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0 & 0,4 & 0,6\\ 0,3 & 0,7 & 0\end{pmatrix}$.

22. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,2 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

23. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,2 & 0,4 & 0,4\\ 0,5 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix}$.

24. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\\ 0,5 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix}$.

25. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & 0\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0,5 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix}$.

26. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,6 & 0,3 & 0,1\\ 0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\end{pmatrix}$.

27. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,6 & 0 & 0,4\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0,7 & 0,3 & 0\end{pmatrix}$.

28. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,6 & 0 & 0,4\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0 & 0,5 & 0,5\end{pmatrix}$.

29. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4 & 0\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0,2 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$.

30. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4 & 0,4\\ 0,6 & 0,4 & 0\\ 0,2 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Статистические таблицы

П.1. Значения функции Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Таблица П.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,2637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3S72	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1738	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1569	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551

Таблица П.1 *(окончание)*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,00501	0,0048	0,0047	0,0043
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

П.2. Значения функции Лапласа $\Phi_0\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Таблица П.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	**3,4**	0,49966	**3,8**	0,49993
3,1	0,49903	**3,5**	0,49977	**3,9**	0,49995
3,2	0,49931	**3,6**	0,49984	**4,0**	0,4999968
3,3	0,49952	**3,7**	0,49989	**5,0**	0,49999997

П.3. Значения $\chi^2_{m,\alpha}$ распределения χ^2 для числа степеней свободы *m* и вероятности $\alpha = P\left\{\chi^2_m > \chi^2_{m,\alpha}\right\}$

Таблица П.3

m	α							
	0,005	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
1	7,879	6,6	5,0	3,8	0,004	0,001	0,000	0,000
2	10,597	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020	0,010
3	12,838	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,86	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,75	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554	0,412
6	18,548	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872	0,676
7	20,278	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,239	0,989
8	21,995	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,646	1,344
9	23,589	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09	1,735
10	25,188	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,50	2,156
11	26,767	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05	2,503
12	28,30	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57	3,074
13	29,819	27,7	24,7	22,4	5,89	5,1	4,11	3,565
14	31,319	29,1	26,	23,7	6,57	5,63	4,66	4,075
15	32,801	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23	4,601
16	34,267	32,0	28,	26,3	7,96	6,91	5,81	5,142
17	35,718	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41	5,697
18	37,156	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01	6,265
19	38,582	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63	6,844
20	39,987	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26	7,434
21	41,401	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90	8,031
22	42,796	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54	8,643
23	44,181	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2	9,260
24	45,559	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9	9,886
25	46,928	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5	10,52
26	48,290	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2	11,16
27	49,645	47,0	41.2	40,1	16,2	14,6	12,9	11,808
28	50,993	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6	12,461
29	52,336	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3	13,121
30	53,672	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0	13,787
48	76,969	72,4	67,8	64,0	32,3	29,9	27,4	26,511
49	78,231	73,7	69,0	65,2	33,1	30,7	28,2	27,249

П.4. Значения λ_q распределения Колмогорова для вероятности $q = P\left\{ \xi_K \geq \lambda_q \right\}$

Таблица П.4

q	**0,50**	**0,40**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
λ_q	0,828	0,895	0,975	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

П.5. Значения $t_{m,\beta}$ распределения Стьюдента для числа степеней свободы m и вероятности $\beta = P\left\{\left|\tau_m\right| < t_{m,\beta}\right\}$

Таблица П.5

β	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	3,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,95
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
47	1.678	2,012	2,418	2,685	3,273	3,51
48	1,677	2,011	2,407	2,682	3,269	3,50
49	1,677	2,01	2,405	2,68	3,232	3,50
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37

Ответы

К главе 1

1.5. $18 \cdot 8 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 2 = 890$. **1.6.** $3^4 = 81$, $2 \cdot 3^3 = 54$. **1.7.** $2 \cdot A_5^3 = 120$. **1.8.** $6! = 720$; $4! \cdot 5 \cdot 2 = 240$; $4! \cdot 5 = 120$. **1.9.** $\dfrac{5!}{2!} = 60$. **1.10.** $C_{12}^2 = 66$. **1.11.** $C_6^2 \cdot 4 = 60$.
1.12. $C_6^2 \cdot C_6^3 = 300$. **1.13.** $C_5^2 + 20 \cdot 15 + 5 \cdot 45 = 535$.

К главе 2

2.6. 1) из трех карт хотя бы одна пиковой масти; 2) все три карты пиковой масти; 3) две карты пиковой масти. **2.7.** $A + B = \Omega$, $A \cdot B = \varnothing$, $A \cdot C = C$, $\overline{A} = B$, $A - C$ — в цель попало более одного выстрела. **2.8.** $C = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2 A_3$. **2.9.** $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + B$, $\overline{C} = \left(\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A}_3\right) \cdot \overline{B}$. **2.10.** 1) $A\overline{B}\overline{C}$; 2) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$; 3) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; 4) ABC; 5) $A + B + C$ или $\Omega - \overline{A}\overline{B}\overline{C}$; 6) $\Omega - ABC$ или $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$. **2.11.** $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{C} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$. **2.17.** $\dfrac{C_5^2}{C_{15}^2} = \dfrac{2}{21}$. **2.18.** $\dfrac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \dfrac{1}{216}$; $\dfrac{1 + 3! + 3}{216} = \dfrac{10}{216}$. **2.19.** 1) $\dfrac{C_{28}^3}{C_{30}^3} = \dfrac{117}{145}$; 2) $\dfrac{28}{C_{30}^3} = \dfrac{1}{145}$, 3) $\dfrac{2 \cdot C_{28}^2}{C_{30}^3} = \dfrac{27}{145}$; 4) $\dfrac{1}{145} + \dfrac{27}{145} = \dfrac{28}{145}$ или $1 - \dfrac{117}{145} = \dfrac{28}{145}$. **2.20.** $\dfrac{5 \cdot C_{20}^2}{C_{25}^3} = \dfrac{19}{46}$.
2.21. $\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2} = \dfrac{28}{45}$. **2.22.** $\dfrac{9 \cdot 4 - 1}{C_{36}^2} = \dfrac{1}{18}$. **2.23.** $\dfrac{2!}{6!} = \dfrac{1}{360}$; $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 1}{A_6^3} = \dfrac{2}{120} = \dfrac{1}{60}$.
2.24. $\dfrac{2! \cdot 13!}{15!} = \dfrac{1}{105}$. **2.25.** 1) $\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; 2) $\dfrac{C_3^2}{2^3} = \dfrac{3}{8}$. **2.32.** $1 - \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \dfrac{1}{3}$.
2.33. $\dfrac{2R^2}{\pi R^2} = \dfrac{2}{\pi} \approx 0{,}637$. **2.34.** $\dfrac{0{,}5 \cdot 3 \cdot 4}{4} = \dfrac{9}{32} = 0{,}28125$. **2.35.** $\dfrac{2\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right) dx}{4} = \dfrac{2}{3}$ или $\dfrac{2\int\limits_{-1}^{1} x^2\, dx}{4} = \dfrac{1}{3}$. **2.36.** $\dfrac{100 - 25}{100} = 0{,}75$. **2.37.** $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{9}$. **2.41.** $\dfrac{4}{36} + \dfrac{9}{36} - \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{3}$.
2.42. $1 - \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{7}{8}$. **2.43.** $\dfrac{5}{10} + \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{7}{10}$. **2.48.** $\dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{8} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{9}$. **2.49.** $\dfrac{10}{16} \cdot \dfrac{9}{15} + \dfrac{6}{16} \cdot \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{2}$.
2.50. $\dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{35}$. **2.51.** $\dfrac{3 \cdot A_5^2}{A_6^3} = \dfrac{1}{2}$. **2.52.** $\dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{6}{9} \cdot \dfrac{5}{8} = \dfrac{7}{24}$. **2.53.** $\dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{6}{8} \cdot C_3^2 = 0{,}3$ или $\dfrac{C_4^2 \cdot 6}{C_{10}^3} = 0{,}3$. **2.54.** $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{31}{32}$. **2.55.** $1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94$ или $0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$.

2.56. $\frac{5}{50}\cdot\frac{4}{49}\cdot\frac{45}{48}\cdot C_3^2=\frac{9}{392}$ или $\frac{C_5^2\cdot 45}{C_{50}^3}=\frac{9}{392}$. **2.57.** 1) $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$; 2) $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{31}{66}$;

3) $\frac{5/33}{31/66}=\frac{10}{31}$. **2.62.** 1) $\frac{8}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot 1+\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot 0+\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2/9}{2/3}=\frac{1}{3}$.

2.63. 1) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{13}{18}$; 2) $\frac{7/60}{13/18}=\frac{21}{130}\approx 0{,}161$.

2.64. 1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}=\frac{25}{182}\approx 0{,}1374$; 2) $\frac{15/182}{25/182}=\frac{3}{5}=0{,}6$. **2.65.** 1) $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{7}$;

2) $\frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}}{3/7}=\frac{2}{3}$. **2.66.** 1) $0{,}64\cdot 0{,}9+0{,}32\cdot 0{,}5+0{,}04\cdot 0=0{,}736$; 2) $\frac{0{,}64\cdot 0{,}9}{0{,}736}=\frac{18}{23}\approx 0{,}783$.

2.71. $C_6^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$. **2.72.** $C_4^2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^2=0{,}2646$. **2.73.** $C_6^3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^3=0{,}27648$.

2.74. $C_5^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{135}{512}$. **2.75.** $1-0{,}8^3=0{,}488$.

2.76. $0{,}8^5+C_5^1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^4+C_5^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3=0{,}94208$. **2.77.** $n\ge\frac{\ln(1-0{,}9)}{\ln\left(1-\frac{1}{6}\right)}\approx 12{,}629$, т. е. 13 раз.

2.82. $P_{50}(k\le 1)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}+\frac{1^1}{1!}e^{-1}\approx 0{,}73576$. **2.83.** $P_{200}(0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}\approx 0{,}13533$.

2.84. $P_{60}(2)=\frac{3^2}{2!}e^{-3}\approx 0{,}22404$. **2.85.** $P_2\{k\le 2\}=e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}\right)\approx 0{,}67677$.

К главе 3

3.5. Табл. 1; $M[X]=\frac{175}{64}\approx 2{,}734$, $D[X]\approx 1{,}5388$, $\sigma_X=\sqrt{1{,}539}\approx 1{,}2405$, $x_{mod}=4$,

$x_{med}=3$; $P\{X\ge 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}+P\{X=4\}=1-P\{X=1\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75$.

3.8. Табл. 2; $M[X]=5\cdot\frac{1}{2}=2{,}5$, $D[X]=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1{,}25$, $\sigma_X=\sqrt{1{,}25}\approx 1{,}118$, $x_{mod_1}=2$,

$x_{mod_2}=3$, $x_{med_1}=2$, $x_{med_2}=3$; $P\{X>3\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}=\frac{6}{32}=0{,}1875$.

Таблица 1

X	1	2	3	4	Σ
P_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

Таблица 2

X	0	1	2	3	4	5	Σ
P_X	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

3.10. Табл. 3; $M[X]=D[X]=\lambda=1$, $\sigma_X=\sqrt{\lambda}=1$, $x_{mod_1}=0$, $x_{mod_2}=1$, $x_{med}=1$;
$P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=1-e^{-1}\left(\frac{1^0}{0!}+\frac{1^1}{1!}+\frac{1^2}{2!}\right)=1-2,5\cdot e^{-1}\approx 0,0803$.

Таблица 3

X	0	1	2	3	...
P_X	$e^{-1}\approx 0,3679$	$e^{-1}\approx 0,3679$	$\frac{1}{2}e^{-1}\approx 0,1839$	$\frac{1}{6}e^{-1}\approx 0,0613$	...

3.12. Табл. 4; $M[X]=\frac{1}{p}=4$, $D[X]=\frac{q}{p^2}=12$, $\sigma_X=\frac{\sqrt{q}}{p}=\sqrt{12}\approx 3,4641$, $x_{mod}=1$, $x_{med}=3$,
$P\{X>4\}=q^4=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}\approx 0,3164$. **3.13.** Табл. 5; $M[X]=\frac{1}{p}=20$, $D[X]=\frac{q}{p^2}=380$,
$\sigma_X=\frac{\sqrt{q}}{p}=\sqrt{380}\approx 19,4936$, $x_{mod}=1$. Учитывая замечание, $x_{med}=14$, т. к.
$1-q^{13}=0,4866<0,5$, а $1-q^{14}=0,5123>0,5$. Вероятность
$P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=q^2=0,95^2\approx 0,9025$.

Таблица 4

X	1	2	3	4	...
P_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$	...

Таблица 5

X	1	2	3	...
P_X	0,05	0,0475	0,045125	...

3.18. $A=-0,5$, $F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ -\frac{1}{4}x^2+2x-3, & 2\leq x\leq 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $M[X]=\frac{8}{3}$, $D[X]=\frac{2}{9}$, $\sigma_X=\frac{\sqrt{2}}{3}$,
$x_{med}=4-\sqrt{2}$, $x_{mod}=2$, $P\{3\leq X<5\}=F(5)-F(3)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

3.19. $A=1$, $B=0$, $M[X]=\frac{3}{4}$, $D[X]=\frac{3}{80}$, $\sigma_X=\sqrt{\frac{3}{80}}$, мода не определена, $x_{med}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$,
$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0;1),\\ 3x^2, & x\in[0;1).\end{cases}$ $P\{0,5\leq X<1\}=1-0,5^3=0,875$. **3.22.** $M[X]=x_{\mathrm{med}}=0$, $D[X]=\frac{1}{12}$,
$\sigma_X=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-0,5;\,0,5],\\ 0, & x\notin(-0,5;\,0,5],\end{cases}$ $P\{X\leq 0,1\}=\int\limits_{-0,5}^{0,1}1dx=0,1+0,5=0,6$.

3.23. $M[X]=x_{med}=4$, $D[X]=\frac{16}{3}$, $\sigma_X=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $f(x)=\left[\begin{array}{ll}\frac{1}{8}, & x\in(0;8],\\ 0, & x\notin(0;8],\end{array}\right.$

$P\{X>5\}=\int_5^8\frac{1}{8}dx=\frac{1}{8}\cdot 3=\frac{3}{8}$. **3.26.** $F(t)=\left[\begin{array}{ll}0, & t<0,\\ 1-e^{-0,5t}, & t\geq 0,\end{array}\right.$ $M[T]=\sigma_X=2$, $D[T]=4$,

$x_{mod}=0$, $x_{med}=2\ln 2$, $P\{1<T<4\}=\left(1-e^{-2}\right)-\left(1-e^{-0,5}\right)\approx 0,4712$.

3.27. $\lambda=1$, $F(t)=\left[\begin{array}{ll}0, & t<0,\\ 1-e^{-t}, & t\geq 0,\end{array}\right.$ $P\{X\geq 1,25\}=F(+\infty)-F(1,25)=1-\left(1-e^{-1,25}\right)\approx 0,2865$.

3.32. $\approx$0,866. **3.33.** $\approx$92. **3.34.** $\approx$0,785. **3.35.** $\approx$0,797.

К главе 4

4.7. Табл. 6. **4.8.** 1) $P\{(X,Y)\in D\}=0,65$; 2) $M[X]=0,85$, $M[Y]=1,85$, $K_{XY}\approx -0,0725$, $r_{XY}\approx -0,0937$; 3) $m_X(1)=1$, $m_X(2)=\frac{1}{3}$, $m_X(3)=\frac{6}{7}$; $m_Y(0)=\frac{17}{9}$, $m_Y(1)=2$, $m_Y(2)=\frac{5}{3}$.

Таблица 6

	$y\leq 0$	$0<y\leq 1$	$1<y\leq 2$	$y>2$
$1<x\leq 2$	0	0	0	0
$1<x\leq 2$	0	0,2	0,4	0,5
$x>2$	0	0,55	0,85	1

4.17. 1) $C=\frac{1}{\pi}$; 2) $f_X(x)=\left[\begin{array}{ll}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & x\in(-1;1),\\ 0, & x\notin(-1;1);\end{array}\right.$ $f_Y(y)=\left[\begin{array}{ll}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & y\in(-1;1),\\ 0, & y\notin(-1;1);\end{array}\right.$

3) $f_Y(y|X=x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ $f_X(x|Y=y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$

4) $M[X]=M[Y]=0$, $K_{XY}=0$, $D[X]=D[Y]=0,25$, $\sigma_X=\sigma_Y=0,5$, $r_{XY}=0$; 5) $m_Y(x)=0$ при $x\in(-1,\ 1)$; $m_X(y)=0$ при $y\in(-1,\ 1)$. Случайные величины X и Y зависимы.

4.18. 1) $C=24$; 2) $f_X(x)=\left[\begin{array}{ll}12x(1-x)^2, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1],\end{array}\right.$ $f_Y(y)=\left[\begin{array}{ll}12y(1-y)^2, & y\in[0;1]\\ 0, & y\notin[0;1];\end{array}\right.$

3) $f_X(x|Y=y)=\begin{cases}\frac{2x}{(1-y)^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ $f_Y(y|X=x)=\begin{cases}\frac{2y}{(1-x)^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$

4) $M[X]=M[Y]=\frac{2}{3}$, $\sigma_X=\sigma_Y=\frac{1}{5}$, $K_{XY}=-\frac{2}{15}$, $r_{XY}=-\frac{2}{3}$; 5) $m_Y(x)=\frac{2}{3}(1-x)$

при $x\in[0;1)$; $m_X(y)=\frac{2}{3}(1-y)$ при $y\in[0;1)$. Случайные величины X и Y зависимы.

К главе 5

5.4. $M[Z]=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}6=2{,}7,\quad D[Z]=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}6-2{,}7^2=2{,}61.$

5.5. $P\{Z\ge 3\}=P\{Z=3\}+P\{Z=8\}=P\{X=-2\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=0{,}15+0{,}3+0{,}2=0{,}65$.

5.9. $f_Z(z)=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{z-2}{2}, & z\in[2;4],\\ 0, & z\notin[2;4].\end{array}\right.$ **5.10.** $F_Z(z)=1-F_X(2-z)=\left[\begin{array}{ll}0, & z<1,\\ z-1, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{array}\right.$

5.11. $F_Z(z)=F_X\left(\dfrac{z+1}{2}\right)=\left[\begin{array}{ll}1-e^{-\frac{z+1}{2}}, & z\ge -1,\\ 0, & z<-1.\end{array}\right.$ **5.13.** $M[Z]=2\cdot 0{,}5+5=6$, $D[Z]=4\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$.

5.14. $M[Z]=M[3X+1]=3M[X]+1=3\cdot\dfrac{1}{3}+1=2$, $D[Z]=D[3X+1]=9D[X]=9\cdot\dfrac{1}{9}=1$.

К главе 8

8.4. Реализации случайного процесса: $x_1(t)=0$, $x_2(t)=t^2$, $x_3(t)=2t^2$, $x_4(t)=3t^2$ при $t\ge 0$. При каждом фиксированном $t\ge 0$ сечение случайного процесса — дискретная случайная величина, закон распределения которой задается табл. 7.

Таблица 7

$X(t)$	0	t^2	$2t^2$	$3t^2$	Σ
P	0,125	0,375	0,375	0,125	1

8.5. Реализации случайного процесса: $x_1(t)=0$, $x_2(t)=e^{-t}$, $x_3(t)=2e^{-t}$ при значениях случайной величины V: $0,\ 1,\ 2$. При каждом фиксированном $t_0\ge 0$ сечение случайного процесса — непрерывная случайная величина $X(\omega,t_0)$, закон распределения которой задан плотностью:

$$f_{X(\omega,t_0)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{2t_0}\cdot x, & x\in\left[0;2e^{-t_0}\right];\\ 0, & x\notin\left[0;2e^{-t_0}\right],\end{cases}$$

в частном случае при $t_0=0$ совпадающей с $f_V(v)$.

8.8. Учитывая числовые характеристики распределенной по геометрическому закону с параметром $p=\dfrac{1}{6}$ случайной величины V, получим:

$$M\left[X(t)\right]=M\left[V\cdot t^2\right]=t^2M[V]=\frac{1}{p}t^2=6t^2;$$

$$D\left[X(t)\right]=D\left[t^2\cdot V\right]=t^4D[V]=t^4\frac{1-p}{p^2}=30t^4;$$

$$K_{X(t)}(t_1,t_2)=t_1^2t_2^2K_{V,V}=t_1^2t_2^2D[V]=30t_1^2t_2^2.$$

8.9. $M\left[X(t)\right]=M\left[V\cdot\sin t\right]=\sin t\cdot M\left[V\right]=\dfrac{a+b}{2}\sin t=1{,}5\sin t$;

$D\left[X(t)\right]=D\left[\sin t\cdot V\right]=\sin^2 t\cdot D\left[V\right]=\sin^2 t\cdot\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{1}{3}\sin^2 t$;

$K_{X(t)}(t_1,t_2)=\sin^2 t_1\cdot\sin^2 t_2\cdot K_{V,V}=\sin^2 t_1\cdot\sin^2 t_2\cdot D\left[V\right]=\dfrac{1}{3}\sin^2 t_1\cdot\sin^2 t_2$.

8.11. Поскольку $X(t)$ и $Y(t)$ — некоррелированные случайные процессы, то $K_{X+Y}(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2)$ и, следовательно, $K_Z(t_1,t_2)=t_1t_2\ln t_1\ln t_2+t_1^2t_2^2\sin t_1\sin t_2$.

8.14. $m_X(t)=M\left[X(t)\right]=\lambda_1+\lambda_2 t\neq 0$. Случайный процесс нестационарный.

8.15. $m_X(t)=M\left[X(t)\right]=0$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)$. Случайный процесс стационарный в широком смысле. Стационарности в узком смысле нет, т. к. сечения $x_1(t)=\cos 2t+\sin 2t$, $x_2(t)=-\cos 2t+\sin 2t$, $x_3(t)=\cos 2t-\sin 2t$ и $x_4(t)=-\cos 2t-\sin 2t$ зависят от t.

8.24. $m_Y(t)=2t^2\left(2+t^2-4t\right)e^{-t}+4t$, $K_Y(t_1,t_2)=4t_1^2\,t_2^2\,e^{t_2+t_1}$, $D_Y(t_1,t_2)=4t^4\,e^{2t}$.

8.25. $X(t)$ — элементарный стационарный случайный процесс. Можно использовать результаты задачи 8.20.

$$m_Y(t)=m_Z(t)=0;$$

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{4}{3}\cos 2(t_2-t_1),\ K_Z(t_1,t_2)=\frac{1}{12}\left(\cos 2(t_2-t_1)-\cos 2t_1-\cos 2t_2+1\right);$$

$$D_Y(t)=\frac{4}{3},\ D_Z(t)=\frac{1}{12}\left(1-2\cos 2t\right).$$

8.33. $S_X(\omega)=\dfrac{2\sin^2\omega}{\pi\omega^2}$. **8.34.** $K_X(s)=\dfrac{\sin s}{s}\underset{s\to\infty}{\to}0$. Случайный процесс эргодический.

Литература

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: КноРус, 2010. — 576 с.
2. Волков И. К., Зуев С. М., Цветкова Г. М. Случайные процессы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. — 448 с.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 2004. — 407 с.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.
5. Кирьянов Д. В. Самоучитель Mathcad 13. — СПб.: БХВ, 2006. — 528 с.
6. Письменный Д. М. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. — М.: Айрис Пресс, 2008. — 288 с.
7. Хрущева И. В., Щербаков И. В., Леванова Д. С. Основы математической статистики и случайных процессов. — СПб.: Лань, 2009. — 336 с.